Master MEEF – Université Paris Diderot – Étienne Parizot

Physique / Mécanique / Exercices divers

• Exercice 1 : Chute verticale avec frottements fluides δ

Un solide S, de masse m, est lâché (à $t = 0$) d'une hauteur h, sans vitesse initiale. Outre son poids, il est soumis à une force de frottement fluide, $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, où λ est une constante positive, et $\vec{v}$ est la vitesse du solide S. On note z son altitude.

1) Faire un schéma et déterminer l'équation de la chute.

2) Résoudre cette équation, c'est-à-dire donner l'altitude $z(t)$ du solide, en fonction du temps.

3) Montrer que le solide atteint une vitesse limite, qu'on notera $\vec{v}_{\rm lim}$, et donner son expression.

4) Comment aurait-on pu déterminer plus rapidement l'expression de $\vec{v}_{\rm lim}$?

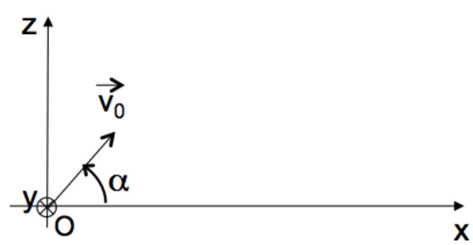
5) On suppose que la vitesse limite est atteinte. Déterminer alors l'expression de la puissance des forces de frottement, ainsi que de la puissance du poids. Commenter.

6) Si l'on fait l'expérience sur Terre, on s'aperçoit que, dans sa chute, le solide S est dévié de la verticale. Pourquoi ? Donner l'expression de la force supplémentaire qui s'exerce sur lui à tout instant.

• Exercice 2 : Lancer d'un projectile

L'espace est repéré par un repère cartésien d'origine O, d'axes (Ox,Oy,Oz), lié à la surface de la Terre, assimilée à un référentiel galiléen. L'axe Oz est l'axe vertical ascendant. Le plan (Ox,Oy) est horizontal. L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g}$.

À l'instant $t = 0$, un opérateur projette du point O un solide ponctuel S, de masse m, avec la vitesse $\vec{v}_0$ dans le plan (Ox,Oz), faisant un axe α avec l'axe Ox. On néglige tout frottement.



1) Expliciter la relation fondamentale de la dynamique pour le solide S.

2) Déterminer le mouvement du solide S en fonction du temps, en donnant les expressions de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

3) Déterminer l'équation intrinsèque de la trajectoire, c'est-à-dire la fonction z en fonction de x et/ou y. Quelle est le nom générique d'une telle courbe ?

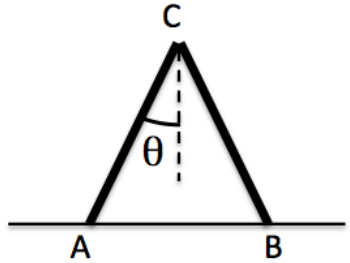
4) Quelle est la portée du lancer, c'est-à-dire la distance entre le point O et le point où le projectile heurte le sol, supposé parfaitement horizontal.

5) Déterminer pour quelle valeur de α la portée est maximale ?

6) Proposer une application numérique raisonnable.

• Exercice 3 : Équilibre de deux barres en appui l'une contre l'autre

Deux barres homogènes identiques, de masse m et de longueur l, sont posées en équilibre l'une contre l'autre, comme représenté sur la figure (au verso de la page). Il n'y a pas de liaison entre elles : elles sont simplement en appui l'une contre l'autre au point C, et elles reposent sur le sol horizontal, l'une au point A, l'autre au point B. Les contacts entre les barres et le sol s'établissent avec un coefficient de frottement solide η. Le champ de pesanteur est supposé uniforme, d'intensité g (vers le bas). La configuration est symétrique par rapport à la verticale passant par C, c'est-à-dire que les deux barres sont inclinées du même angle θ par rapport à la verticale.



1) Reproduire le schéma et représenter les forces qui s'appliquent sur les deux barres, en précisant bien la direction et le point d'application.

2) Utiliser les propriétés de symétrie du problème pour déterminer, parmi toutes ces forces, lesquelles ont une intensité identique (indépendamment de leur direction).

3) On s'intéresse à l'une des deux barres, par exemple celle de gauche. Énoncer les conditions d'équilibre de cette barre (assurant qu'elle demeure au repos).

4) À partir de ces conditions d'équilibre, déterminer la valeur des forces s'appliquant sur la barre.

5) Déterminer l'angle maximal, $\theta_{\max}$, pour lequel l'équilibre est effectivement possible.

6) A.N. : Donner la valeur numérique de cet angle, dans le cas où le coefficient de frottement entre les barres et le sol vaut $\eta = 0.25$.

• Exercice 4 : Corps glissant sur une demi-sphère

Un corps de masse m supposé ponctuel se trouve initialement au sommet d'une demi-sphère posée à plat sur un support (constituant un référentiel supposé galiléen) auquel elle est fixée.

1) Dans cette position, le corps est en équilibre instable. Que se passe-t-il s'il commence imperceptiblement à glisser dans une certaine direction ? Décrire le mouvement qui s'ensuit, et déterminer où et quand le corps cessera d'être en contact avec la demi-sphère.

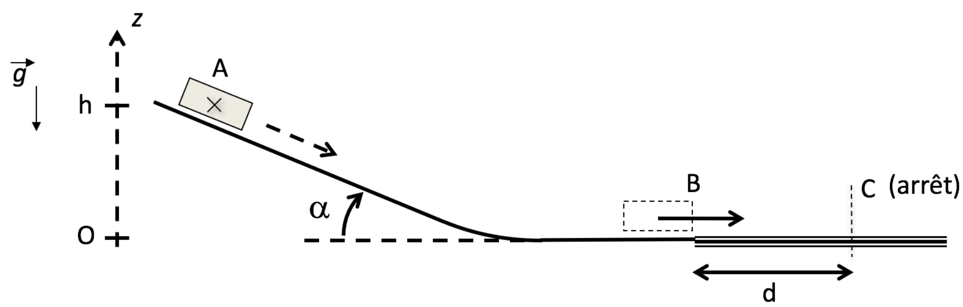
2) Même question si le corps est initialement lancé horizontalement (donc tangentiellement à la demi-sphère) avec une vitesse de norme v_0.

3) Décrire qualitativement ce qui se passerait si la demi-sphère n'était pas fixée au support, mais pouvait se déplacer librement

• Exercice 5 : Arrêt d'un corps par frottement

Un corps de masse m se déplace sur une piste constituée d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, qui se raccorde à un plan horizontal, que l'on choisit comme origine des altitudes. Il règne un champ de pesanteur uniforme d'accélération $\vec{g}$ dirigée vers le bas. On note g sa norme.

Le corps est lâché sans vitesse initiale en un point A à une altitude h au dessus du plan horizontal. Il se déplace sans frottement jusqu'à un point B situé sur la partie horizontale, puis au-delà de B avec un coefficient de frottement dynamique μ.

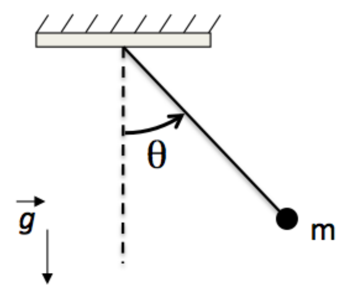


1) Déterminer la vitesse du corps au point B (à l'entrée de la partie avec frottements), en fonction des données du problème.

2) Déterminer la distance d (au-delà de B) au bout de laquelle le corps s'arrêtera.

• Exercice 6 : Pendule simple

Soit un pendule constitué d'un fil inextensible de longueur l et d'une bille assimilée à un point matériel de masse m. Ce pendule est placé dans un champ de pesanteur uniforme, dont on note $\vec{g}$ le vecteur accélération. À l'instant $t = 0$, on le lâche sans vitesse initiale à partir d'une position repérée par l'angle $\theta(t = 0) = \theta_0$.



1) Déterminer l'équation du mouvement permettant d'obtenir θ en fonction du temps, en raisonnant sur l'énergie.

2) Déterminer l'équation du mouvement en raisonnant sur le moment cinétique.

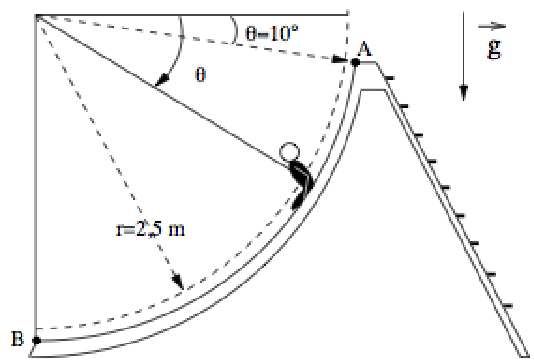
3) Déterminer l'équation du mouvement en écrivant la relation fondamentale de la dynamique.

4) Résoudre l'équation du mouvement, c'est-à-dire déterminer la fonction $\theta(t)$, dans l'approximation des petits angles, $\theta_0 \ll 1$.

• Exercice 7 : toboggan

Un corps assimilé à un point matériel de masse $m = 40$ kg se déplace sans frottement le long d'un toboggan de forme circulaire de rayon $r = 2.5$ m.

À l'instant $t = 0$, le corps est lâché sans vitesse initiale à partir d'une position repérée par l'angle $\theta_0 = 10°$, comme indiqué sur la figure ci-dessous (point A).



1) Donner l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant le théorème du moment cinétique.

2) En déduire la vitesse du corps en fonction de l'angle θ. A.N. : calculer numériquement la vitesse au point B.

• Exercice 8 : Ressorts "en série" ou "en parallèle"

Soit un corps solide de masse m, pouvant se déplacer sans frottement sur un support horizontal, selon un mouvement à une dimension. Dans un premier temps, il est lié à un mur fixe (dans un référentiel galiléen) par un ressort de longueur à vide l_0, de raideur k_1 et de masse négligeable (cas (a) de la figure).

1) Établir l'équation du mouvement de deux manières différentes, après avoir défini un système de coordonné de votre choix.

2) Reconnaître l'équation d'un oscillateur harmonique, et l'écrire sous sa forme canonique. Donner l'expression de la pulsation, puis de la période des oscillations correspondantes.

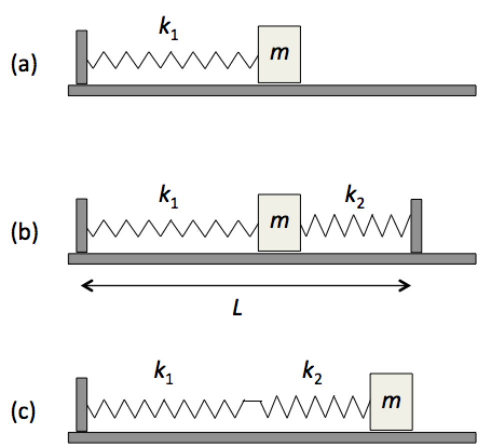


Fig. 1 – Oscillateurs mécaniques utilisant des ressorts.

On ajoute à présent une autre liaison, reliant le corps à un mur opposé par l'intermédiaire d'un second ressort supposé sans masse, de même longueur à vide, mais de raideur différente, k_2 (cas (b) de la figure). Le mouvement est toujours unidirectionnel (les deux ressorts sont alignés sur un même axe). La distance entre les deux murs est notée L.

3) Déterminer la position d'équilibre, en distinguant s'il y a lieu entre différentes situations, suivant la relation entre L et l_0.

4) Écrire l'équation du mouvement de la masse m le long de l'axe, si elle est initialement déplacée de sa position d'équilibre (le choix de l'origine des coordonnées est laissé libre).

5) Montrer qu'il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique et donner sa pulsation, ω.

6) A.N. : donner la valeur numérique de la période des oscillations correspondantes, pour $m = 1,5$ kg, $k_1 = 100$ N/m, $k_2 = 50$ N/m, $l_0 = 25$ cm et $L = 60$ cm.

7) Comparer l'équation du mouvement ci-dessus à celle d'un oscillateur harmonique simple, et donner la raideur effective du ressort équivalent au système considéré.

On considère à présent la situation (c) de la figure, où le corps est relié au seul ressort de raideur k_2, lui-même relié au ressort de raideur k_1, fixé au mur.

8) Expliquer clairement pourquoi, à chaque instant, la tension des deux ressorts est la même. On la notera T_0. (Cette tension est bien sûr variable au cours du mouvement.)

9) Déterminer l'allongement global des deux ressorts, en fonction de la tension T_0.

10) En déduire la raideur k du ressort équivalent au système constitué par les deux ressorts.

11) Écrire alors l'équation différentielle du mouvement (lorsque la masse est décalée de sa position d'équilibre), et préciser sa pulsation.

12) A.N. : donner la valeur numérique de la période des oscillations correspondantes.

• Exercice 9 : deux corps liés par un ressort

Deux corps solides de masse respective m_1 et m_2, reliés par un ressort de raideur k, de longueur à vide l_0 et supposé sans masse, sont libres de glisser sans frottement sur un support horizontal, constituant un référentiel galiléen, noté $\mathcal{R}$. On repère leur position par les abscisses x_1 et x_2 le long d'un axe Ox parallèle au ressort, et l'on note v_1 et v_2 leurs vitesses dans $\mathcal{R}$. On ne considérera que des mouvements à une dimension, suivant cet axe.

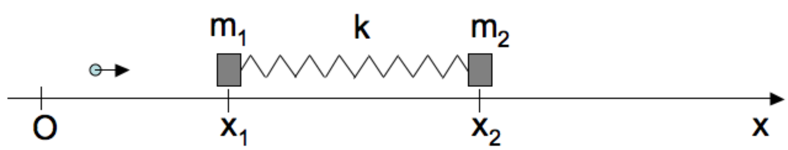


Fig. 2 – Deux corps reliés par un ressort

La configuration initiale du système est telle que les deux corps sont au repos dans le référentiel $\mathcal{R}$, et que le ressort n'est ni étiré, ni comprimé, c'est-à-dire que l'on a $x_2 - x_1 = l_0$. Puis, à l'instant $t = 0$, on communique "instantanément" au corps 1 une vitesse v_0, sans modifier les positions (par exemple au moyen d'un choc avec un projectile, comme suggéré sur la figure), de sorte qu'à $t = 0^+$, on a encore $x_2(0^+) - x_1(0^+) = l_0$, et les vitesses $v_1(0^+) = v_0$ et $v_2(0^+) = 0$.

1) Exprimez, en fonction des données du problème, la position du centre de masse, G, du système constitué par les deux corps et le ressort.
2) Quelles sont les quantités de mouvement du corps 1, du corps 2 et du point G à l'instant $t = 0^+$?

3) Indiquez pourquoi la quantité de mouvement totale du système se conserve au cours du temps, pour $t > 0$. En déduire la vitesse de G, $v_{\mathrm{G}}(t)$, pour $t > 0$. Précisez si le référentiel du centre de masse (lié à G, et en translation par rapport à $\mathcal{R}$) est galiléen ou non. Justifiez.

On notera $\mathcal{R}^\star$ ce référentiel.

4) Exprimez, à l'instant initial $t = 0^+$, les vitesses des corps 1 et 2, $v_1^\star(0^+)$ et $v_2^\star(0^+)$, dans le référentiel du centre de masse, $\mathcal{R}^\star$. Que vaut la quantité de mouvement totale du système dans ce référentiel ? Commentez.

5) Quelle est l'énergie totale du système dans $\mathcal{R}^\star$, à $t = 0^+$, que l'on notera $E^\star_{\mathrm{tot}}(0^+)$? Définissez la masse réduite du système, μ, et exprimez $E^\star_{\mathrm{tot}}(0^+)$ en fonction de μ et de v_0. Commentez.

6) Montrez que le théorème de Koenig, reliant l'énergie dans $\mathcal{R}$ à l'énergie dans $\mathcal{R}^\star$, est bien vérifié dans ce cas particulier, à $t = 0^+$.

7) L'énergie totale du système, $E^\star_{\mathrm{tot}}$, est-elle conservée dans $\mathcal{R}^\star$? Pourquoi ?

8) Décrivez qualitativement le mouvement dans $\mathcal{R}^\star$ et dans $\mathcal{R}$ pour $t > 0$.

9) Par un argument énergétique, et après avoir rappelé l'expression de l'énergie potentielle élastique associée au ressort, déterminez les longueurs minimale, l_{min}, et maximale, l_{max}, qu'aura le ressort au cours du mouvement. On les exprimera en fonction de l_0, v_0 et la fréquence propre d'oscillation, définie par $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$.

• Exercice 10 : Satellite en orbite autour de la Terre

On considère le mouvement d'un satellite autour de la Terre, de masse M_{T}.

1) Est-il possible qu'un tel satellite se trouve toujours à la verticale d'un même point A situé sur la surface de la Terre ?

2) Si oui, quel doit être le mouvement du satellite, et à quelle distance du centre de la Terre doit-il se trouver ?

3) Soit un satellite placé sur une orbite elliptique autour de la Terre. On donne r_0 la hauteur de son périgée, et v_0 sa vitesse à son périgée. Déterminer la hauteur de son apogée.

• Problème 11 : Passe-temps interstellaire et nombre d'or...

Sandra et George, partis en mission spatiale intersidérale, ont connu quelques problèmes techniques et se retrouvent perdus dans l'espace, en apesanteur complète, seuls avec leur tenue d'astronaute, loin de toute masse et de toute influence extérieure. Ils ont envoyé un signal de détresse, mais en attendant l'arrivée (improbable ?) d'un vaisseau de secours, ils décident de s'occuper en se lançant une boule de titane qui traînait dans une poche de Sandra.

Avec leurs équipements respectifs, Sandra et George se trouvent avoir la même masse, qu'on notera M. La boule de titane a quant à elle une masse m. On note r le rapport de masse : $r = m/M$. Les deux astronautes sont initialement au repos l'un par rapport à l'autre. On note alors $\mathcal{R}_0$ leur référentiel commun, qui est galiléen. On choisit comme axe des x l'axe reliant les deux astronautes, orienté de Sandra à George.

Tous les mouvements considérés dans cet exercice s'effectueront suivant cet axe, et l'on pourra désigner les vitesses $\vec{v}$ directement par leur valeur algébrique en projection sur le vecteur unitaire $\vec{u}_x$, c'est-à-dire par la grandeur v telle que $\vec{v} = v\,\vec{u}_x$.

A - Premier lancer

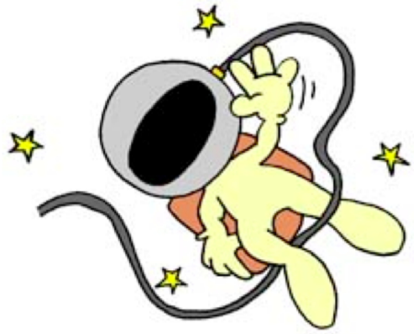


FIG. 3 – On s'amuse comme on peut...

1) À l'instant t_0, Sandra lance la boule de titane en direction de George. La boule acquiert ainsi une vitesse $v_0 > 0$ dans le référentiel $\mathcal{R}_0$. Indiquer pourquoi Sandra se voit alors animée d'une vitesse non nulle par rapport à George. Exprimer la valeur algébrique de la vitesse de Sandra, v_{S}, dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, en fonction de v_0 et du rapport de masse, r, défini ci-dessus.

2) Déterminer l'expression de l'énergie totale, E_0, mise en jeu par Sandra pour lancer la boule (en supposant que toute l'énergie mise en jeu se retrouve dans le mouvement des deux corps). Quelle fraction α de cette énergie a-t-elle été communiquée à la boule ? On fera intervenir le rapport de masse, r.

3) À l'instant t_1, George attrape la boule. Déterminer, dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, la vitesse résultante, v_{G}, commune à George et à la boule, après cet instant.

4) Montrer que le système composé de la boule et de George a perdu de l'énergie mécanique au cours de la collision, et donner l'expression de l'inélasticité ξ du "choc mou" correspondant, en faisant intervenir le rapport de masse r. Expliquer pourquoi ce résultat n'entre pas en contradiction avec la propriété générale de conservation de l'énergie de tout système physique isolé, au niveau fondamental.

B - Deuxième lancer

On note $\mathcal{R}^*$ le référentiel de George (et de la boule) après l'instant t_1. Ce référentiel est donc animé de la vitesse v_{G} déterminée à la question 3 par rapport à $\mathcal{R}_0$. Dans ce référentiel, les vitesses de George et de la boule, notées v^*_{G} et v^*_{b}, sont donc nulles après que George a attrapé la boule.

5) À l'instant t_2, George renvoie la boule en titane à Sandra, en mettant en jeu, dans le référentiel $\mathcal{R}^*$, la même énergie E_0 que celle obtenue à la question 2 ci-dessus. En raisonnant à la fois sur la quantité de mouvement et sur l'énergie, déterminer les vitesses acquises par la boule, $v^{*\prime}_{\mathrm{b}}$, et par George, $v^{*\prime}_{\mathrm{G}}$, dans $\mathcal{R}^*$, en fonction de v_0 et de r. Indiquer comment on aurait pu obtenir ce résultat directement, sans effectuer de nouveau calcul, à partir des résultats précédents.

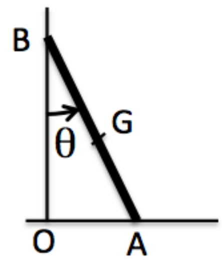
6) Déduire de la question précédente les vitesses de la boule et de George, respectivement v'_{b} et v'_{G}, dans le référentiel $\mathcal{R}_0$.

7) À quelle condition Sandra pourra-t-elle attraper de nouveau la boule de titane ? On exprimera cette condition sous la forme $r < r_0$, en précisant la valeur du rapport de masse critique r_0.

8) Question bonus : quel lien existe-t-il entre r_0 et le *nombre d'or*, réputé caractériser des proportions particulièrement harmonieuses ? (On trouve un intérêt pour ce "nombre d'or" dès l'antiquité grecque, dans le fameux ouvrage d'Euclide intitulé *Les élements*, puis tout au long de l'histoire de l'art, notamment à la Renaissance, où on lui donne le nom de *divine proportion*, mais également jusqu'à la période contemporaine, que ce soit en architecture, en peinture ou en musique...)

• Exercice 12 : équilibre d'une échelle

Une échelle considérée comme un solide homogène, de masse M et de longueur L, est placée en appui sur un mur vertical, au point B, et sur un sol horizontal, au point A. Le centre de masse de l'échelle, situé en son milieu, est noté G. On note θ l'angle d'inclinaison par rapport au mur (voir la figure).



On note η le coefficient de frottement entre l'échelle et le sol (le frottement entre l'échelle et le mur est supposé négligeable).

1) Rappeler les conditions d'équilibre générales d'un solide.

2) L'échelle étant supposée à l'équilibre, déterminer la composante normale de la réaction du sol sur l'échelle, qu'on notera $\vec{R}_\mathrm{N} = R_\mathrm{N}\,\vec{u}_z$, l'axe des z étant l'axe vertical, orienté vers le haut.

3) En déduire la valeur maximale, en norme, de la réaction tangentielle du sol sur l'échelle : $\|\vec{R}_\mathrm{T}\|$.

4) Calculer les moments, au point A, de toutes les forces s'appliquant sur l'échelle. NB : s'il y a lieu d'introduire un vecteur unitaire particulier, on indiquera précisément le choix fait.

5) Quel est angle d'inclinaison maximal de l'échelle, $\theta_{\max}$, au-delà duquel l'équilibre n'est plus possible.

• Exercice 13 : Corps suspendu à un ressort sur plan incliné

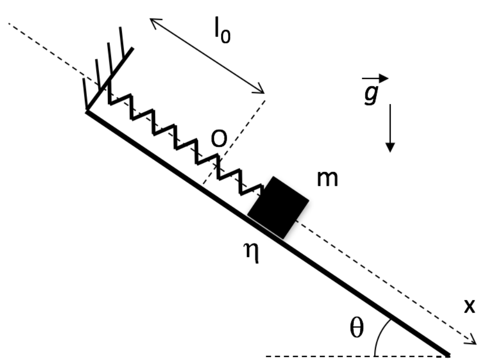


FIG. 4 – Suspension par un ressort, avec frottement.

Un corps de masse m dans un champ de pesanteur d'accélération $\vec{g}$ est suspendu à un ressort de raideur k et repose sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale, comme indiqué sur la Figure. Le contact entre le corps et le plan incliné s'établit avec un coefficient de frottement η. La position du corps de masse m est repérée par sa coordonnée x le long du plan incliné, l'axe Ox étant orienté comme indiqué sur la figure, et l'origine O correspondant à une extension nulle du ressort (autrement dit, lorsque le corps se trouve en $x = 0$, la force élastique exercée par le ressort est nulle).

1) Établir la liste des forces s'exerçant sur le corps ?

2) Déterminer toutes les positions d'équilibre possibles pour ce système.

• Exercice 14 : Lancer d'un corps

Répondre aux questions suivantes avec le minimum de calculs :

1) Un corps de masse m est lancé verticalement vers le haut dans un champ de pesanteur d'accélération $\vec{g}$, avec la vitesse v_0 (en norme), à partir d'un point de hauteur H (au-dessus du sol). Quelle hauteur maximale (au-dessus du sol) atteindra-t-il ?

2) Le corps est maintenant lancé, toujours d'une hauteur H et toujours avec la même vitesse v_0, mais vers le bas. Quelle sera sa vitesse lorsqu'il atteindra le sol ?

3) Le corps est à présent lancé, toujours d'une hauteur H et toujours avec la même vitesse v_0, dans une direction faisant un angle α avec l'horizontale (vers le haut). Quelle hauteur maximale atteindra-t-il, et quel sera son vecteur vitesse en ce point ?

• Exercice 15 : Rotation et suspension

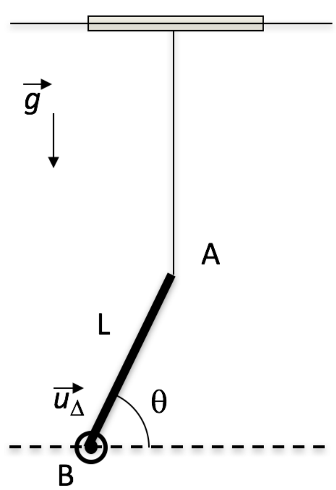


FIG. 5 – Barre pivotante, suspendue verticalement.

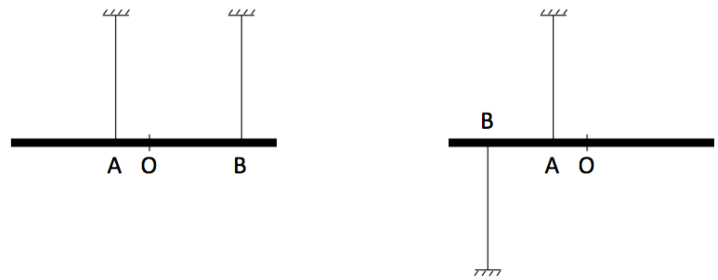
Une barre homogène de masse m et de longueur L est libre de tourner sans frottement autour d'un axe orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, comme représenté sur la figure ci-dessus. Elle est retenue par un fil de masse négligeable relié à un support mobile pouvant coulisser sans frottement autour d'un axe horizontal (voir Figure). Lorsque le système est à l'équilibre, la barre se trouve dans une direction faisant un angle θ par rapport à l'horizontale, comme indiqué. Le système est placé dans un champ de pesanteur d'accélération $\vec{g} = -g_0\,\vec{u}_z$.

1) Dresser la liste des forces s'exerçant sur la barre.

2) Déterminer entièrement ces forces, en fonction des données du problème.

• Exercice 16 : Équilibre à deux fils

Une barre homogène de longueur L et de masse M est suspendue horizontalement par deux fils verticaux. On considère deux configurations possibles pour l'équilibre de la barre, comme représenté ci-dessous. Le premier fil est fixé en A, à une distance r_{A} du milieu de la barre. Le second fil est fixé en B, à une distance r_{B} du milieu de la barre.



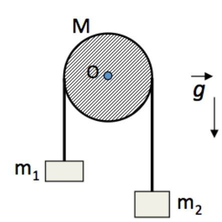
1) Déterminer la tension de chaque fil, pour l'équilibre correspondant à la figure de gauche.

2) Déterminer la tension de chaque fil, pour l'équilibre correspondant à la figure de droite.

• Exercice 17 : Orientation d'un axe

Représenter un axe, de direction quelconque. Choisir un sens d'orientation de votre choix, et représenter le vecteur unitaire associé, ainsi que le sens positif correspondant pour les repérage des angles autour de cet axe.

• Exercice 18 : Une poulie simple



Une poulie cylindrique de masse M et de rayon R est libre de tourner sans frottement autour d'un axe horizontal fixe, passant par son centre O. On note I le moment d'inertie de la poulie par rapport à cet axe. Deux corps de masses respectives m_1 et m_2 sont suspendues de part et d'autre de cette poulie, par un fil inextensible de masse négligeable. Le contact entre le fil et la poulie est tel que le fil ne glisse pas sur le périmètre extérieur de la poulie. Les corps sont initialement au repos.

1) Déterminer l'accélération $\vec{a}_1$ de la masse m_1 et les forces appliquées sur la poulie.

2) Retrouver l'expression de $\vec{a}_1$ en raisonnant sur l'énergie.

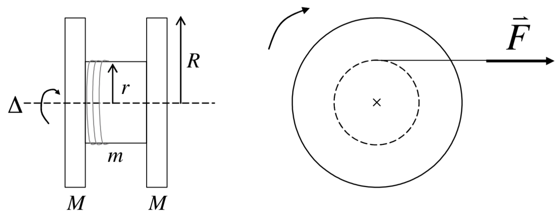
3) Qu'obtient-on dans le cas où $m_1 = m_2$?

4) Même question si $M \ll m_1$ et $M \ll m_2$.

5) Que vaut l'accélération ci-dessus si $m_2 = 2m_1$, dans le cas où M est négligeable, puis dans le cas où $M = m_2$ avec une poulie assimilée à un disque homogène.

• Exercice 19 : Déroulement d'une bobine de fil

Une bobine de fil, consituée de trois cylindres de rayons respectifs R, r et R, et de masses respectives M, m et M, est maintenue sur un axe horizontal Δ autour duquel elle peut tourner. On déroule la bobine en tirant sur une extrémité du fil avec une force $\vec{F}$ constante. Le fil, dont on négligera l'épaisseur et la masse, roule sans glisser sur la bobine.



1) Rappelez l'expression du moment d'inertie, par rapport à un axe Δ, d'un objet ponctuel de masse dm situé à une distance r de cet axe. En déduire, par un calcul d'intégrale, le moment d'inertie d'un cylindre de rayon R et masse M.

2) En vous aidant du résultat précédent, exprimez le moment d'inertie I de la bobine par rapport à son axe de rotation (Δ), en fonction de m, M, r et R.

3) Exprimez le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe (Δ), en fonction d'un vecteur unitaire que vous représenterez clairement sur un schéma.

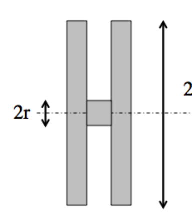
4) En raisonnant sur le moment cinétique de la bobine, déterminez son accélération angulaire $\dot{\omega}$, en fonction de F, r et I. En déduire la vitesse angulaire $\omega(t)$ de la bobine.

5) Exprimez le travail élémentaire dW de la force $vecF$ au cours d'un déplacement infinitésimal dl, de durée dt. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, retrouvez l'accélération angulaire obtenue à la question précédente.

6) Déterminez la force F à appliquer afin de dérouler une longueur L de fil en une durée τ. On exprimera d'abord le résultat en fonction de L, τ, I et r, puis en fonction de L, τ, M, m, R et r. Que devient cette expression pour $M = m$ et $R = 2r$? Faites l'application numérique dans le cas suivant : $M = m = 100$ g, $R = 2r = 2$ cm, $L = 10$ m, et $\tau = 5$ s.

• Exercice 20 : Un yoyo

On considère un yoyo de masse M, formé de deux disques homogènes identiques de rayon R, reliés par un cylindre très court, de masse négligeable et de rayon r, autour duquel s'enroule un fil inextensible, très fil et de masse négligeable, fixé à un doigt immobile.



1) Quelle simplification résulte de l'hypothèse que le cylindre central est très court ?

2) Le yoyo étant lâché sans vitesse initiale, déterminer l'accélération de son centre de masse, G, ainsi que la tension du fil, $\vec{T}$.

3) Retrouver l'accélération en raisonnant sur l'énergie.

4) Déterminer le mouvement du yoyo en bout de course (fil entièrement déroulé).

• Exercice 21 : Cylindre en mouvement sur un plan incliné

On considère un cylindre de rayon R et de masse M. On note Δ son axe.

1) Calculer le moment d'inertie, I_Δ, de ce cylindre par rapport à Δ, dans les trois cas suivants :
a) le cylindre est plein et homogène ;
b) le cylindre est creux et homogène (sa masse est répartie sur la surface externe) ;
c) le cylindre est plein, avec une masse volumique variant linéairement en fonction de la distance à l'axe, r, avec $\rho = 0$ en $r = 0$, et $\rho = \rho_0$ en $r = R$.

2) Ce cylindre est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, le contact s'établissant le long d'un segment de droite sur le bord externe du cylindre avec un coefficient de frottement solide noté η. Il est initialement lâché sans vitesse initiale, son axe étant horizontal et perpendiculaire à la ligne de plus grande pente du plan incliné. Décrire précisément son mouvement ultérieur, qualitativement et quantitativement.

NB : On pourra introduire toutes les grandeurs et notations jugées utiles. Il suffira de les définir et de les caractériser de manière explicite. Plusieurs cas pourront être distingués si nécessaire, en fonction des valeurs numériques des grandeurs physiques pertinentes.

• Exercice 22 : Machine d'Atwood sur un plan incliné

Deux corps solides de masse m_1 et m_2, reliés par un fil inextensible de masse négligeable, sont disposés comme sur la Fig. 6, dans un référentiel supposé galiléen.

Le fil entraîne sans glisser une poulie de centre C, fixe dans ce référentiel, d'axe Δ, de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, représenté sur la figure. On note I_Δ le moment d'inertie de la poulie autour de son axe, et R son rayon. Sa rotation est repérée par l'angle θ, orienté positivement dans le sens horaire, en conformité avec l'orientation de l'axe (voir Fig. 6). La rotation se fait sans aucun frottement.

Le corps de masse m_2 repose sur un support incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On néglige tout frottement entre le corps et le support.

La position du corps de masse m_1 est repérée par sa coordonnée z_1 le long de l'axe vertical, orienté vers le haut. La position du corps de masse m_2 est repérée par sa coordonnée x_2 le long de l'axe des x, parallèle au plan incliné, orienté vers le bas, comme indiqué sur la Fig. 6.

Le champ de pesanteur est supposé uniforme, d'accélération $\vec{g} = -g\vec{u}_z$.

1) On abandonne le système sans mouvement initial. Quelle relation doivent vérifier les grandeurs mentionnées ci-dessus pour que les masses et la poulie restent immobiles ? À quelle condition le corps de masse m_1 se déplacera-t-il vers le haut ?

On suppose dorénavant que cette condition est vérifiée, et on s'intéresse au mouvement vertical de ce corps. On note T_1 la norme de la tension $\vec{T_1}$ exercée par le fil sur le corps 1, qui est aussi la norme de la force exercée sur la poulie par le fil vertical. On note de même T_2 la norme de la tension $\vec{T_2}$ exercée par le fil sur le corps 2, qui est aussi le module de la force exercée sur la poulie par le fil incliné. On a donc $T_1 > 0$ et $T_2 > 0$, mais *a priori* $T_1 \neq T_2$.

2) Exprimer en fonction de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ le moment cinétique, $\vec{\sigma}_C$, de la poulie par rapport à son centre, puis sa projection, σ_Δ, sur l'axe Δ.

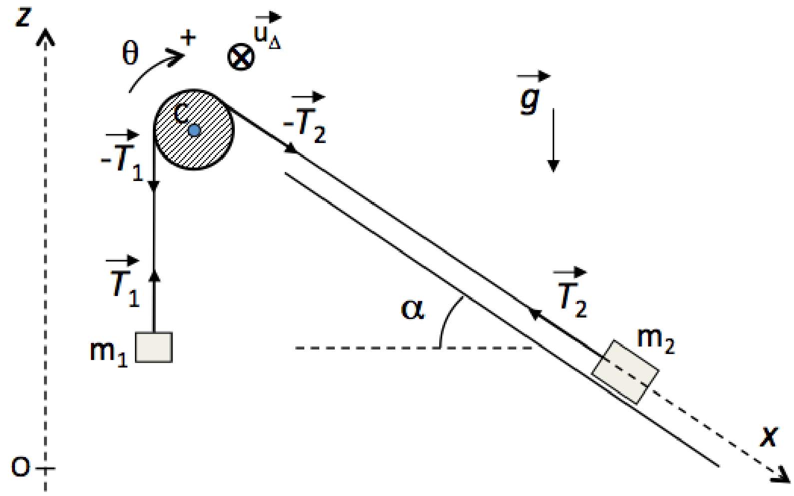


FIG. 6 – Schéma du dispositif comprenant une poulie, deux solides et un plan incliné.

3) Appliquer le théorème du moment cinétique à la poulie, et en déduire une équation différentielle portant sur l'angle θ, faisant intervenir I_Δ, T_1 et T_2 et éventuellement d'autres données du problème.

4) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique au corps de masse m_1, et en déduire une équation différentielle portant sur la coordonnée z_1.

5) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique au corps de masse m_2, et en déduire une équation différentielle portant sur la coordonnée x_2.

6) Quelle(s) relation(s) relie(nt) la vitesse du corps 1, $\dot{z}_1$, la vitesse du corps 2, $\dot{x}_2$, et la vitesse angulaire de la poulie, $\omega = \dot{\theta}$?

7) À partir des questions précédentes, déterminer l'accélération du corps de masse m_1, c'est-à-dire $\ddot{z}_1$. On l'écrira sous la forme $\ddot{z}_1 = k \times g$, et on exprimera k en fonction de m_1, m_2, α, I_Δ et R.

8) On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le système est abandonné à lui-même à partir de l'état initial où la masse m_1 est maintenue au repos sur le sol : $z_1 = 0$, et $\dot{z}_1 = 0$. Déterminer la vitesse de ce corps lorsqu'il atteint l'altitude $z_1 = h$.

9) Que vaut alors l'énergie cinétique totale du système, composé des deux corps 1 et 2 ainsi que de la poulie (on rappellera l'expression de l'énergie cinétique de rotation de la poulie en fonction de sa vitesse angulaire) ?

10) Ce résultat est-il conforme à ce qui pouvait être attendu ? Commenter.

• Exercice 23 : Tige horizontale sur deux rouleaux en rotation contraire

On considère le dispositif représenté sur la Fig. 7, dans lequel une tige homogène de masse totale M est posée horizontalement sur deux rouleaux cylindriques identiques, orientés perpendiculairement à la figure, et dont les centres sont séparés par une distance $2L$. On note A et B les points de contact entre la tige et les rouleaux, et on définit l'axe horizontal Ox comme indiqué sur la figure : l'origine O est située à égale distance des centres des rouleaux, et les abscisses des points A et B sont donc, respectivement $x_\mathrm{A} = -L$ et $x_\mathrm{B} = +L$.

La position du centre de masse, G, de la tige est repérée par son abscisse x. La situation est donc totalement symétrique lorsque G se trouve au dessus du point O, c'est-à-dire pour $x = 0$.

La dispositif est placé dans un champ de pesanteur vertical uniforme, caractérisé par l'accélération g, et le référentiel d'étude est supposé galiléen.

On note μ le coefficient de frottement dynamique entre la tige et les rouleaux.

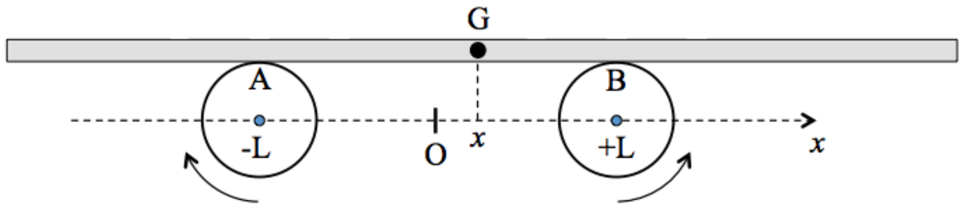


FIG. 7 – Tige homogène posée horizontalement sur deux rouleaux cylindriques.

A] On suppose dans un premier temps que les rouleaux ne tournent pas autour de leur axe, et que la tige est immobile.

1) Représenter sur un schéma les forces auxquelles la tige est soumise, en précisant leur point d'application, et rappeler les conditions générales assurant l'équilibre d'un solide.

2) Déterminer entièrement les forces s'appliquant sur la tige (direction, sens et intensité), en fonction de la position x du centre de masse.

3) Indiquer, en le justifiant, pour quelles valeurs de x un tel équilibre est possible.

B] Par un dispositif extérieur, on met à présent les rouleaux en mouvement de rotation rapide autour de leur axe, de sorte qu'ils glissent tous deux sous la tige. On choisit un mouvement de rotation contraire, comme indiqué sur la Fig. 7 : le rouleau de gauche tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, le rouleau de droite dans le sens inverse.

4) Déterminer à nouveau toutes les forces s'appliquant sur la tige (direction, sens et intensité), en fonction de la position x du centre de masse.

5) Déterminer l'équation du mouvement de la tige.

6) Montrer que la tige va osciller autour d'une position que l'on précisera, et donner l'expression de la période des oscillations.

7) Donner la valeur numérique de la période des oscillations, dans le cas où $\mu = 0.3$, $L = 50$ cm et $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

C] On réalise à présent la même montage, mais en faisant tourner chacun des rouleaux dans l'autre sens : le rouleau de gauche dans le sens trigonométrique, et le rouleau de droite dans le sens des aiguilles d'une montre.

8) Déterminer la nouvelle équation du mouvement de la tige.

9) Résoudre cette équation en supposant que la tige est lâchée sur les rouleaux à l'instant $t = 0$ à la position $x = x_0 > 0$, sans vitesse initiale.

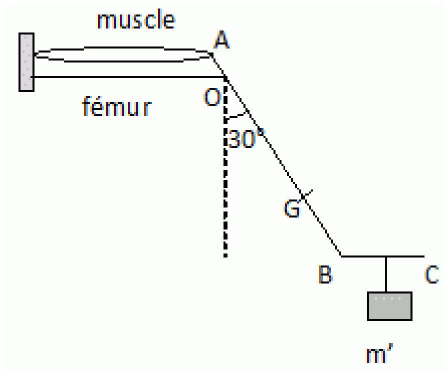
10) Jusqu'à quelle valeur de $x = x_c$ la solution précédente est-elle valable ? À quel instant, t_c, la position correspondante est-elle atteinte ?

11) Calculer numériquement t_c pour $x_0 = 3$ cm, puis pour $x_0 = 3$ mm.

12) Décrire qualitativement ce qui se passera ensuite.

• Exercice 24 : Extension de la jambe

On modélise l'action du muscle extenseur de la jambe de la manière représentée sur le schéma suivant :



La partie inférieure de la jambe AB, de longueur AB = 50 cm, est mobile autour d'un axe passant par O et perpendiculaire au plan de la figure (rotule). La cuisse est supposée fixe, le fémur étant horizontal, comme indiqué. Le muscle fémoral, tirant au point A par contraction, permet de faire pivoter la partie inférieure de la jambe autour de O. La distance entre O et A vaut OA = 3 cm.

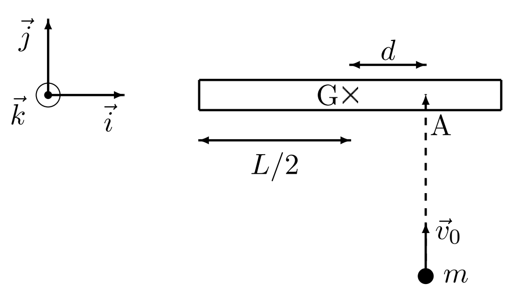
BC représente le pied, au milieu duquel est suspendu une masse $m' = 3$ kg. On donne BC = 24 cm, et la masse totale de la jambe et du pied vaut $m = 5$ kg.

G est le centre de gravité de l'ensemble ABC (jambe et pied sans la charge m'). Il est supposé situé sur la droite AB, à une distance AG =35 cm du point A.

1) Donner l'expression de la force horizontale exercée en A par le muscle pour maintenir la masse m' à l'équilibre. Effectuer l'application numérique.

• Exercice 25 : Impact d'un projectile sur une barre

Une barre homogène de longueur L, d'épaisseur négligeable et de masse M, est libre de se mouvoir sans frottement sur un support horizontal, considéré comme un référentiel galiléen, noté $\mathcal{R}$. Son centre de masse est noté G. On choisit un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que la barre soit initialement orientée selon l'axe $\vec{i}$ et tel que $\vec{k}$ soit orientée selon la verticale ascendante (perpendiculaire au plan de la feuille sur la figure ci-dessous, qui représente donc vue du dessus). Les coordonnées du point G sont initialement $(x_0, 0, 0)$, où x_0 est une abscisse arbitraire.



À l'instant $t = 0$, la barre reçoit l'impact d'un projectile de masse m et de vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{j}$, qui vient s'encastrer dans la barre en un point A, à une distance d du point G : $x_\mathrm{A} = x_0 + d$. (La longueur d est appelée « paramètre d'impact »).

On rappelle que le moment d'inertie d'une barre de longueur L autour d'un axe qui lui est perpendiculaire et qui passe par son centre vaut $I = \frac{1}{12}ML^2$.

A] Axe fixe

On suppose dans un premier temps que la barre est montée sur un axe de rotation vertical, Δ, passant par le point G et fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$. La barre est libre de tourner sans frottement autour de cet axe.

1) On considère le système global, comprenant à la fois la barre et le projectile. Montrer que le moment cinétique de ce système se conserve.

2) Déterminer la vitesse angulaire Ω de la barre après l'impact, en fonction du paramètre d'impact, d et des autres paramètres du problème.

B] Barre libre

La même expérience que précédemment est répétée, mais cette fois l'axe est retiré, de sorte que la barre est libre de se mouvoir sans entrave et sans frottement dans le plan $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. L'impact a lieu à nouveau à l'instant $t = 0$, et le projectile reste, cette fois encore, incrusté dans la barre.

3) Déterminer la position du nouveau centre de gravité du système, G', immédiatement après l'impact du projectile.

4) Soir $\mathcal{R}'$ le référentiel du centre de masse, dans lequel on peut définir un repère immobile de centre G' et d'axes parallèles à $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est-il galiléen ? Justifier.

5) Déterminer la vitesse vectorielle, $\vec{v}_{\mathrm{G}'}(t)$, pour $t \geq 0$.

6) Par un argument de conservation, déterminer le moment cinétique en G' de la barre, $\vec{\sigma}_{\mathrm{G}'}$, après l'impact. On fera intervenir la « masse réduite », $\mu = mM/(m + M)$.

7) Calculer explicitement le moment d'inertie, $I_{\mathrm{G}'}$, de la barre par rapport à l'axe $(\mathrm{G}', \vec{k})$, après l'impact (c'est-à-dire lorsque la barre est lestée par le projectile). Montrer qu'il peut se mettre sous la forme $I_{\mathrm{G}'} = \frac{1}{12} ML^2 + \mu d^2$.

8) Compte tenu des deux questions précédentes, déterminer dans $\mathcal{R}'$ la vitesse angulaire de rotation, Ω', de la barre autour de l'axe $(\mathrm{G}', \vec{k})$.

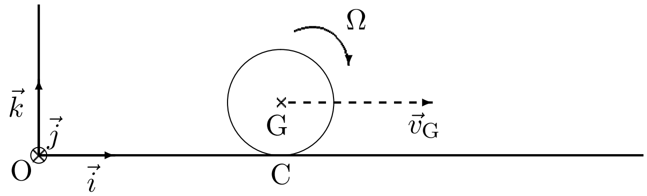
9) Décrire le mouvement complet de la barre après l'impact, comme la composition de deux mouvements. Commenter.

10) Calculer, dans $\mathcal{R}$, l'énergie cinétique totale du système après l'impact, $E_{\mathrm{c},1}$, et montrer qu'elle est toujours inférieure à l'énergie cinétique initiale, $E_{\mathrm{c},0}$. Où est passée la différence d'énergie, $\Delta E_{\mathrm{c}} = E_{\mathrm{c},0} - E_{\mathrm{c},1}$?

11) Pour quelle valeur du paramètre d'impact l'énergie dissipée est-elle maximale ? Que vaut-elle alors ?

• Exercice 26 : Le booling, c'est facile !

On considère une boule de booling parfaitement sphérique, homogène, de rayon $R = 10$ cm et de masse $M = 5$ kg. Le coefficient de frottement de la boule sur la piste est noté μ et l'on prendre $\mu = 0.2$ (on suppose que les coefficients de frottement statique et dynamique sont égaux). L'accélération de la pesanteur a approximativement la valeur $g = 10\,\mathrm{m^2 s^{-2}}$. On suppose que la piste est horizontale et forme un référentiel galiléen, et l'on choisit l'axe $\vec{i}$ dans la direction du mouvement de la boule, l'axe $\vec{k}$ selon la verticale, orientée vers le haut, et l'axe $\vec{j}$ perpendiculairement aux deux autres axes, de façon à former un trièdre direct, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



À chaque instant, on note C le point de contact entre la boule et la piste. En tant que point de la boule, ce point est différent à chaque instant, sauf si la boule ne tourne pas et ne fait que glisser sur la piste, en un mouvement de translation parfait. En tant que point de la piste, ce point de contact n'est jamais le même, sauf si la boule reste immobile ou bien tourne sur place, en "patinant". G, le centre de la boule, se situe toujours à la verticale du point de contact C.

On rappelle que le moment d'inertie d'une sphère par rapport à un axe passant par son centre vaut $I = \frac{2}{5}MR^2$.

A] « Roulement sans glisser » sur la piste

On note Ω la vitesse angulaire de rotation de la boule autour de l'axe $(\mathrm{G},\vec{j})$, de sorte que son vecteur rotation s'écrit $\vec{\Omega} = \Omega\vec{j}$.

1) Exprimer la relation vectorielle reliant la vitesse du point G, $\vec{v}_\mathrm{G}$, le vecteur rotation $\vec{\Omega}$, la vitesse d'un point M quelconque de la boule, $\vec{v}_\mathrm{M}$, et le rayon $\vec{\mathrm{GM}}$. (0,5)

2) On dit que la boule *roule sans glisser* sur la piste si, à chaque instant t, le point de la boule qui est en contact avec la piste (c'est-à-dire le point de la boule qui coïncide avec C) a une vitesse nulle par rapport à la piste : $\vec{v}_C = \vec{0}$. Montrer, dans ce cas, que la vitesse linéaire de la boule, v_G, et sa vitesse angulaire, Ω, sont liées par la relation algébrique $v_\mathrm{G} = \Omega R$. (0,5)

3) En déduire le rapport σ_Δ/p entre le moment cinétique, σ_Δ, de la boule autour de l'axe Δ passant par G et orienté par $\vec{j}$, et sa quantité de mouvement totale, p (telle que $\vec{p} = p\vec{i}$). Commenter. (0,5)

4) Donner l'expression de l'énergie cinétique de rotation, $E_{\mathrm{c,rot}}$, et de l'énergie cinétique de translation de la boule, $E_{\mathrm{c,trans}}$, en fonction des données du problème. En déduire la valeur du rapport $E_{\mathrm{c,rot}}/E_{\mathrm{c,trans}}$. (1)

On note dorénavant $\Omega_0(v_\mathrm{G})$ la vitesse angulaire assurant un roulement sans glisser de la boule, lorsque celle-ci se déplace linéairement à la vitesse v_G. Autrement dit, on note $\Omega_0 = v_\mathrm{G}/R$.

B] Roulement avec glissement sur la piste

5) La boule ayant une vitesse v_G et une vitesse angulaire Ω quelconque, exprimer en fonction de R, Ω et Ω_0 (calculé pour la valeur v_G), la vitesse de glissement $\vec{v_\mathrm{C}}$ de la boule sur la piste, c'est-à-dire la vitesse (par rapport à la piste) du point de la boule coïncidant avec le point C. (0,5)

6) Soit $\vec{f} = f\vec{i}$ la force de frottement associée au glissement de la boule sur la piste. Exprimer algébriquement la valeur de f, en fonction du coefficient de frottement μ, dans les trois cas suivants (0,5) :

$$\text{a) } \Omega > \Omega_0, \qquad \text{b) } \Omega < \Omega_0, \qquad \text{c) } \Omega = \Omega_0.$$

C] Et que ça roule !

À l'instant $t = 0$, on lance la boule à la vitesse $\vec{v}_{\mathrm{G}}(t = 0) = v_0\vec{i}$, et sans vitesse angulaire initiale : $\Omega(t = 0) = 0$.

7) Faire le bilan des forces agissant sur la boule, en indiquant les points d'application, et montrer que la boule va se mettre à tourner. Préciser le sens de rotation. (0,5)

8) En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'évolution de la vitesse angulaire de la boule en fonction du temps, tant que $\Omega > \Omega_0(v_{\mathrm{g}})$. (1,5)

9) Écrire par ailleurs l'équation donnant l'évolution de la vitesse linéaire de la boule, $\vec{v}_{\mathrm{G}}(t)$, et déterminer cette vitesse en fonction du temps. (1,5)

10) Déterminer l'instant t_1 auquel la boule cesse de glisser sur la piste. (1)

11) Décrire qualitativement l'évolution ultérieure du mouvement. Justifier. (0,5)

12) Exprimer la vitesse v_1 de la boule au moment où elle se met à tourner sans glisser, en fonction de la vitesse initiale, v_0. (0,5)

13) Déterminer l'énergie cinétique totale de la boule, $E_{\mathrm{c}}(t)$, pour $0 \leq t \leq t_1$, en fonction des paramètres du problème (on utilisera les résultats des questions 8 et 9). (1,5)

14) Exprimer la vitesse de glissement, $v_{\mathrm{C}}(t)$, pendant la phase de décélération, c'est-à-dire pour $0 \leq t \leq t_1$. En déduire la puissance de la force de frottement s'appliquant sur la boule : $\mathcal{P}_{\mathrm{f}} = \vec{f} \cdot \vec{v}_{\mathrm{C}}$. (1)

15) Montrer que le théorème de l'énergie cinétique peut se mettre ici sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\mathrm{f}}. \quad (0,5)$$

16) En déduire l'évolution de l'énergie cinétique en fonction du temps, et montrer qu'elle est conforme au résultat de la question 13. (1)

17) Quelle fraction de l'énergie initiale la boule conserve-t-elle après la phase de glissement ? De quoi dépend cette énergie. Où est passée le reste de l'énergie ? De quels paramètres dépend l'énergie dissipée entre l'instant t_0 et l'instant t_1 ? N'est-ce pas remarquable ? (1)

18) En utilisant le résultat de la question 9, déterminer la position de la boule en fonction du temps, $x(t)$, pour $0 \leq t \leq t_1$. On prendra comme origine des abscisses ($x = 0$) la position de la boule à l'instant $t = 0$. (0,5)

19) Application numérique : si la vitesse initiale de lancement est $v_0 = 7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, calculer la durée de la phase de glissement, t_1, la distance parcourue au cours de cette phase, et la vitesse atteinte à cet instant. (0,5)

Exercice 27 : Trajectoire d'un astéroïde

I - L'astéroïde est-il géocroiseur ?

Dans cette partie, nous considérons un astéroïde A, quasi sphérique, de masse m_A et de rayon R_{A}, soumis à la seule attraction du Soleil, en négligeant l'action exercée par tous les autres corps. On se place dans le référentiel héliocentrique, $\mathcal{R}_{\odot}$, supposé galiléen. Ce référentiel, dans lequel le Soleil est au repos, est muni d'un repère polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ ayant son origine au centre du Soleil. On repère la position de l'astéroïde par le vecteur $\vec{r} = r\,\vec{u}_r$. La masse du Soleil vaut $M_\odot \simeq 2 \cdot 10^{30}$ kg, et la constante de gravitation universelle de Newton vaut $G \simeq 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 s^{-2} kg^{-1}}$.

1) Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par le Soleil sur l'astéroïde.

2) Justifier que le mouvement de l'astéroïde s'effectue dans un plan.

Grâce à diverses observations dans l'infrarouge, les astronomes ont repéré l'astéroïde et sont parvenus à déterminer sa position et sa vitesse à un instant donné, t_0, dans le référentiel $\mathcal{R}_\odot$. On note $\vec{r}_0 = r_0 \vec{u}_r$ cette position, et $\vec{v}_0 = v_{r,0}\vec{u}_r + v_{\theta,0}\vec{u}_\theta$ la vitesse correspondante, où l'angle θ est repéré dans le plan de la trajectoire par rapport à une direction donnée, prise comme référence.

3) Relier les dérivées temporelles du rayon, $\dot{r}(t)$, et de l'angle polaire, $\dot{\theta}(t)$, de l'astéroïde autour du Soleil, aux composantes, $v_r(t)$ et $v_\theta(t)$, de la vitesse dans le repère polaire.

4) Donner l'expression de l'énergie potentielle associée à la force de gravitation exercée par le Soleil sur l'astéroïde, et tracer son graphe (par convention, on supposera que cette énergie potentielle est nulle à l'infini).

5) Exprimer l'énergie mécanique, E_m, de l'astéroïde, en fonction des grandeurs précédemment introduites.

6) Cette énergie mécanique varie-t-elle au cours du mouvement. Si oui : comment ? Si non : pourquoi ?

7) Application numérique : calculer la masse m_A, sachant que son rayon vaut $R_\mathrm{A} = 100$ m et que sa masse volumique moyenne vaut $\rho = \frac{3}{4\pi}\,10^4\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

8) Calculer numériquement l'énergie mécanique, E_0, de l'astéroïde à l'instant t_0, sachant que $r_0 = 2 \cdot 10^8$ km, $v_{r,0} = 5$ km/s et $v_{\theta,0} = 20$ km/s.

9) En déduire la nature de la trajectoire, en justifiant la réponse.

10) Si un corps de même masse, m_A, et d'énergie mécanique E_0 avait une orbite circulaire, quelle serait son rayon, r_c ? Déterminer d'abord son expression littérale en fonction de m_A, E_0, $M_\odot$ et G, puis effectuer l'application numérique.

11) Donner l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}$ de l'astéroïde par rapport au point S, centre du Soleil.

12) Ce moment cinétique varie-t-il au cours du mouvement. Si non : pourquoi ? Si oui : comment ?

13) Calculer numériquement sa norme, σ_0, à l'instant t_0.

14) Exprimer à nouveau l'énergie mécanique, E_m, de l'astéroïde dans le référentiel $\mathcal{R}_\odot$, en faisant intervenir σ_0, et la vitesse radiale, v_r.

15) En déduire l'expression d'une équation du second degré en r permettant de déterminer le périhélie, r_min, et l'aphélie, r_max, de l'orbite de l'astéroïde autour du Soleil (i.e. respectivement les positions la plus proche et la plus éloignée du Soleil). Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$r^2 - 2r_\mathrm{c}r + R^2 = 0, \quad \text{avec} \quad R = \frac{\sigma_0}{\sqrt{-2mE_0}}.$$

16) En déduire l'expression de r_min et r_max en fonction de r_c et R.

17) L'orbite de l'astéroïde est-elle susceptible de croiser celle de la Terre, quasi circulaire à une distance $D_\mathrm{T} = 1.5\,10^8$ km du Soleil ?

II - Par Toutatis, le ciel nous tombera-t-il sur la tête ?

Dans cette partie, on considère le système constitué par l'astéroïde, de centre A, et la Terre, de centre T, en faisant abstraction de tout autre corps céleste et en négligeant en particulier l'attraction exercée par le Soleil. La situation considérée est alors celle de la figure 8, représentée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. La masse de la Terre, $M_T \simeq 6\,10^{24}$ kg étant très supérieure à celle de l'astéroïde, on pourra négliger ici l'action que ce dernier exerce sur elle.

À l'instant "initial", t_0, l'astéroïde A se trouve à très grande distance de la Terre, de sorte que l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle astéroïde–Terre est négligeable. Il est animé d'une vitesse relative $\vec{v}_0$ (par rapport à la Terre) dirigée le long d'un axe Δ passant à une distance b du centre de la Terre, T (appelée *paramètre d'impact*). Le système astéroïde–Terre évolue alors librement, sous l'action de la seule force de gravitation newtonienne.

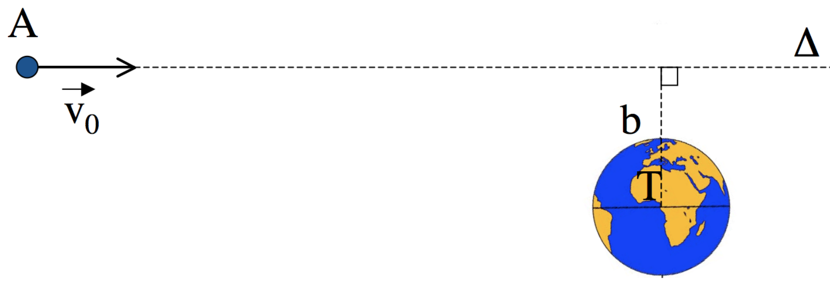


Fig. 8 – Configuration initiale : l'astéroïde est en mouvement quasi rectiligne uniforme, à très grande distance de la Terre, elle-même initialement immobile (cf. texte).

18) Quelles sont les quantités conservées au cours du mouvement ? Justifier la réponse.

19) Soit H le point de la trajectoire de l'astéroïde où sa distance à la Terre est minimale. Représenter schématiquement cette trajectoire en indiquant la position du point H et justifier que les deux vecteurs $\vec{r}_{\mathrm{H}}$ et $\vec{v}_{\mathrm{H}}$ (position repérée par rapport au centre de la Terre et vitesse associée) soient orthogonaux.

20) En exploitant les lois de conservation, déterminer la distance minimale d'approche, r_H, en fonction des données du problème.

21) Application numérique : si $v_0 = 5$ km/s et $b = 10\,000$ km, l'astéroïde de rayon $R_A \ll R_{\mathrm{T}}$ percutera-t-il la Terre ? On rappelle le rayon de la Terre : $R_{\mathrm{T}} \simeq 6\,380$ km.

22) En gardant la vitesse initiale $v_0 = 5$ km/s, quelle est la valeur du paramètre d'impact minimal, $b_{\min}$, garantissant que laTerre soit épargnée ?

III - Éloigner la menace

Afin de défléchir la trajectoire d'un astéroïde menaçant la Terre, on envisage d'envoyer une sonde à sa rencontre, et de le percuter. NB : dans cette partie on ne considère que le système astéroïde/sonde, en faisant abstraction de tout autre corps céleste.

La Fig. 9 représente la situation envisagée dans le référentiel héliocentrique, $\mathcal{R}_\odot$. (Le point O, origine du repère représenté, n'est toutefois pas ici le centre du Soleil.) On réalise un choc "parfaitement mou", à l'issue duquel nous supposerons qu'il n'y a plus qu'un corps solide, la sonde étant "encastrée" dans l'astéroïde. La sonde, de masse $m_{\mathrm{S}} = 20$ tonnes, possède avant le choc une vitesse de norme $v_S = 14.1$ km/s mesurée dans $\mathcal{R}_\odot$, tandis que l'astéroïde, de masse $m_{\mathrm{A}} = 10^{10}$ kg, est animé dans ce même référentiel d'une vitesse $v_{\mathrm{A}} = 20$ km/s, dirigée le long de l'axe Ox. L'angle entre les directions des deux corps vaut $\theta = 45°$, comme indiqué sur la figure ci-dessous, où A désigne l'astéroïde et S la sonde.

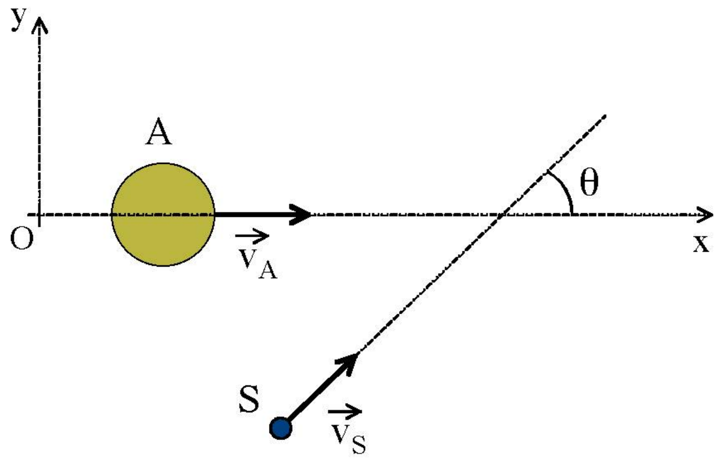


FIG. 9 – Schéma représentant les trajectoires de la sonde et de l'astéroïde avant le choc, dans le référentiel héliocentrique.

23) Déterminer le vecteur vitesse de l'astéroïde après la collision, en négligeant l'interaction gravitationnelle entre les deux corps. On ne demande pas d'application numérique pour ses composantes.

24) Exprimer la tangente de l'angle φ entre l'axe Ox et la trajectoire de l'astéroïde après la collision. Donner le résultat au premier ordre en $m_\mathrm{S}/m_\mathrm{A}$, considéré comme très petit (c'est bien le cas, en effet !).

25) Au bout de quelle distance, D, l'astéroïde se sera-t-il décalé de $\Delta b = 5\,000$ km perpendiculairement à sa trajectoire initiale ? Effectuer l'application numérique.

26) Quel(s) inconvénient(s) présente selon vous une telle méthode ?

27) Une autre méthode envisagé consiste à poser la sonde sur l'astéroïde, à s'arrimer, et à le propulser à partir de cette position. Quels avantages pourraient présenter une telle méthode ? Et quel(s) inconvénient(s) ?

28) Quelle autre méthode pourriez-vous suggérer ?