Master MEEF – Université Paris Diderot – Étienne Parizot

Physique / Hydrostatique et hydrodynamique / Exercices divers

• Exercice 1 : Variation de la pression avec l'altitude

1) Établir la loi fondamentale de l'équilibre hydrostatique pour un fluide placé dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$.

2) En déduire la loi donnant la pression dans un fluide incompressible de masse volumique ρ en fonction de la profondeur.

3) Déterminer la pression en fonction de l'altitude z au sein d'une atmosphère isotherme composée d'un gaz parfait de masse molaire M, en notant P_0 la pression au sol.

4) On considère à présent une atmosphère dans laquelle le gaz est un gaz parfait de masse molaire M obéissant à la *loi polytropique d'indice* k, c'est-à-dire que sa pression est reliée à sa masse volumique par la relation $p/\rho^k = \text{cte}$.

a) Montrer que $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$ est une constante que l'on exprimera en fonction de g, M, k et R, la constante des gaz parfaits.

b) En déduire que l'on a :

$$p(z) = p_0(1 - \beta z)^{\frac{k}{k-1}},$$

où l'on exprimera β en fonction des données du problème.

• Exercice 2 : Surface de contact entre deux fluides

Deux fluides incompressibles non miscibles sont versés dans un récipient, placé dans un champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen. Montrer que leur surface de contact est horizontale.

• Exercice 3 : Surface libre d'un fluide

Un fluide incompressible de masse volumique ρ est placé dans un récipient au repos dans un référentiel galiléen. D'après l'exercice précédent, sa surface libre est horizontale.

1) Qu'en est-il dans le cas où le récipient est uniformément accéléré avec l'accélération $\vec{a} = a_0\vec{u_x}$, où $\vec{u_x}$ est un vecteur unitaire horizontal ?

2) Même question dans le cas où $\vec{a} = a_0\vec{u}$, où le vecteur unitaire $\vec{u}$ fait un angle θ avec la verticale.

3) Déterminer la forme de la surface libre de l'eau dans un seau tournant à la vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical.

• Exercice 4 : Vérin hydraulique

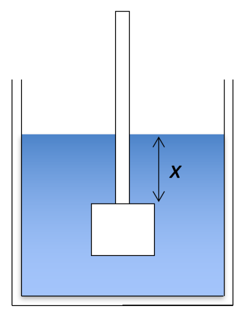
Soient deux pistons de forme cylindrique circulaire, contenant un fluide incompressible, et reliés entre eux par une conduite horizontale à travers laquelle le fluide peut passer librement de l'un à l'autre des pistons. Le premier piston a un diamètre de $D_1 = 1$ m. Le second a un diamètre de $D_2 = 10$ cm. Si les deux pistons sont situés au même niveau (même altitude z), quelle masse convient-il de poser sur le plateau du piston 2 pour équilibrer un masse de 1 tonne sur le plateau du piston 1 ?

• Exercice 5 : Échelle de pression

1) L'orifice d'un tube à essai dans lequel on a fait le vide est plongé dans un bain de mercure situé dans le champ de pesanteur terrestre à la pression atmosphérique standard. Expliquer pourquoi le mercure monte alors dans le tube, et déterminer son élévation relative, sachant que le mercure a une densité de 13.6.

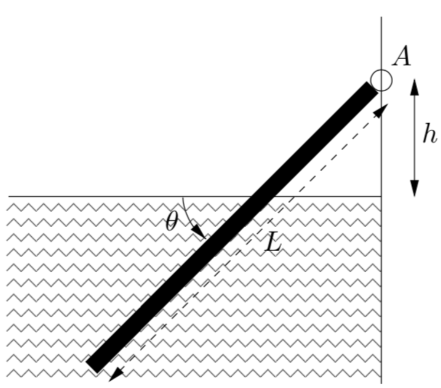
2) Faire le schéma d'un manomètre à mercure permettant de mesurer la pression d'un gaz dans une enceinte.

• Exercice 6 : Densimètre



Un densimètre de masse M est composé d'un tube cylindrique homogène de section S, de hauteur h_0 et de masse m, lesté à sa base par une ampoule de volume V_0 contenant du mercure. Montrer que la lecture de la hauteur de tube immergée, h, permet de déterminer la densité du liquide dans lequel elle est plongée.

• Exercice 7 : Flottaison sous contrainte



Une barre mince homogène de longueur L, faite d'un matériau de densité $d < 1$, est accrochée à un mur en un point A, autour duquel elle est libre de tourner sans frottement. Lautre extrémité de la barre plonge dans leau. Le point A est à une hauteur h par rapport au niveau de leau.

1) Determiner l'angle d'inclinaison de la barre, θ, correspondant à la position d'équilibre.

2) Pour quelle valeur critique du rapport h/L la barre tombe-t-elle à la verticale ?

3) Application numérique : calculer θ à l'équilibre pour $d = 0.65$, $h = 1$ m et $L = 3$ m.

• Exercice 8 : Force de pression résultante et point d'application

Un fluide incompressible de densité ρ est placé dans un aquarium de forme parallélépipédique rectangle de hauteur h, de largeur a et de longueur b.

1) Déterminer la force de pression résultante sur chacune des cinq faces en contact avec le fluide.

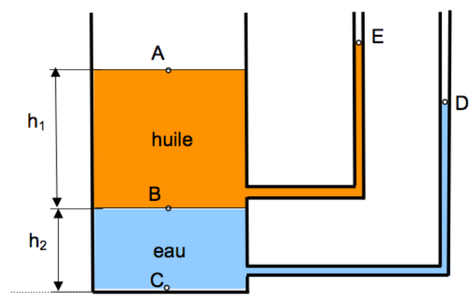
2) Déterminer le point d'application de ces forces résultantes.

• Exercice 9 : Iceberg

Un iceberg sphérique de masse totale égale à 1 tonne et constitué de glace de masse volumique $\rho_{\text{glace}} = 995$ kg/m^3 flotte sur de l'eau de mer de densité $\rho_{\text{mer}} = 1025$ kg/m^3. Déterminer la fraction du volume de l'iceberg qui se trouve immergée. Même question si l'iceberg est de forme cubique.

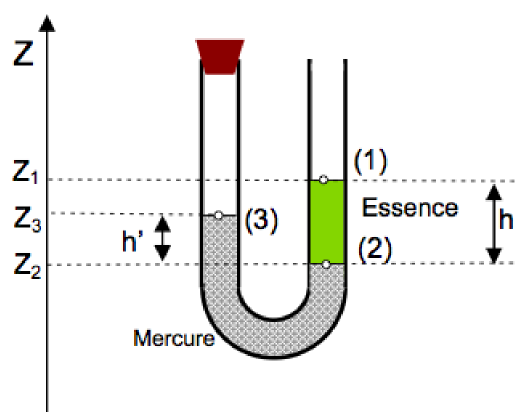
• Exercice 10 : Deux liquides non miscibles

Un réservoir équipé de tubes piézométriques est rempli de deux liquides non miscibles, comme indiqué sur la figure ci-contre : de l'huile, sur une hauteur h_1, et de l'eau, sur une hauteur h_2. Déterminer l'altitude des points E et D, pour une huile de densité $d = 0.85$, dans le champ de pesanteur terrestre, avec $h_1 = 6$ m et $h_2 = 5$ m.



• Exercice 11 : Essence et mercure

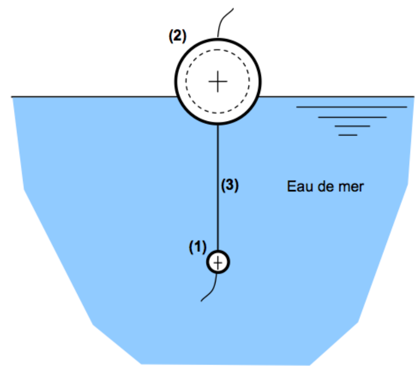
Un tube en U fermé à une extrémité contient deux liquides non miscibles : de l'essence de masse volumique $\rho_e = 700$ kg/m^3, entre les surfaces (1) et (2), distantes de $h = 728$ mm, et du mercure de masse volumique $\rho_e = 13\,600$ kg/m^3, entre les surfaces (2) et (3), distantes de $h' = 15$ mm. La surface à l'air libre étant à la pression atmosphérique, déterminer la pression du gaz emprisonné dans la branche fermée du tube.



• Exercice 12 : Pêche à la ligne en eau douce

On considère une ligne de pêche constituée d'un flotteur, d'un fil de volume et de masse négligeables, et d'un plomb de masse volumique $\rho_{\text{Pb}} = 11\,340$ km/m^3. Le flotteur est une sphère creuse de rayon externe R = 35 mm et d'épaisseur e = 5 mm. Il est constitué d'un matériau plastique de densité d = 0.5. L'accélération de la pesanteur est $g = 9.81$ m/s^2.

Quelle doit être la masse du plomb placé en bout de ligne pour que le flotteur soit à demi immergé ?



• Exercice 13 : Filet d'eau d'un robinet

1) Pourquoi le filet d'eau s'écoulant d'un robinet se rétrécit-il en tombant ?

2) Quel phénomène est responsable de la "transformation" du filet d'eau en gouttes d'eau après une certaine distance de chute ?

• Exercice 14 : Relation de Bernouilli

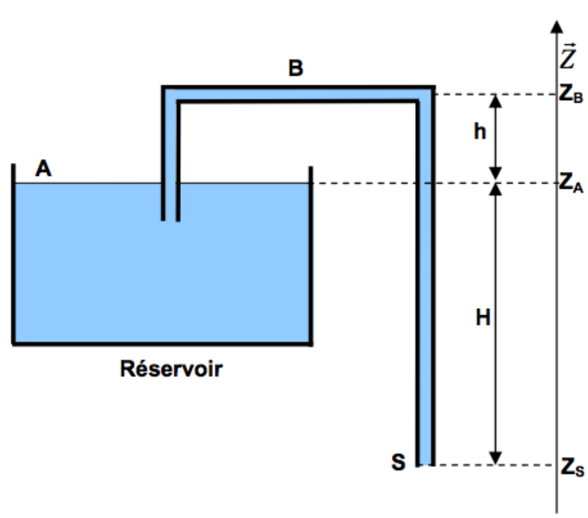
Généraliser la relation de Bernouilli au cas d'un référentiel uniformément accéléré avec l'accélération $\vec{a} = a_e \vec{u}_x$.

• Exercice 15 : Vidange d'un réservoir

Un réservoir cylindrique de rayon $R = 1$ m, rempli d'eau sur une hauteur $h = 5$ m, est percé à sa base par un orifice circulaire de diamètre $d = 10$ mm. Combien de temps prendra la vidange complète dans le champ de pesanteur terrestre ? Comparer le débit volumique moyen au débit d'écoulement initial.

• Exercice 16 : Siphon

On considère un siphon de diamètre d = 1 mm, alimenté par un réservoir d'essence de grandes dimensions par rapport à d et ouvert à l'atmosphère. Le fluide est supposé parfait et incompressible, de masse volumique ρ = 700 kg/m^3. L'accélération de la pesanteur est g = 9.81 m/s^2. La branche horizontale du siphon (voir figure ci-contre) se situe à une hauteur h au dessus de la surface libre du réservoir. L'extrémité du siphon, S, se situe à une



distance H au-dessous de cette même surface.

1) Déterminer la vitesse d'écoulement dans le siphon.

2) En déduire le débit volumique q_V, et le débit massique, q_m.

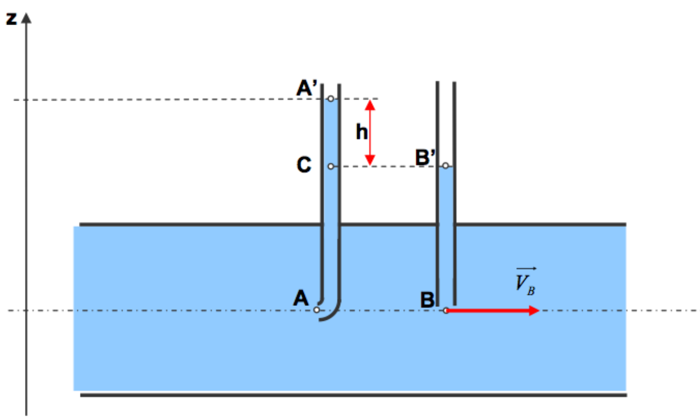
3) Donner l'expression de la pression P_B au point B, en fonction des données du problème. Donner sa valeur numérique pour $h = 0.4$ m.

4) Le siphonage de l'essence peut-il toujours se poursuivre jusqu'à l'épuisement du réservoir (en supposant que l'entrée du siphon se situe tout près du fond) ?

• Exercice 17 : Débit et loi des nœuds

Une conduite de section S_1, dans laquelle s'écoule un fluide incompressible, se sépare en deux conduites de sections S_2 et S_3. Écrire une "loi des nœuds" analogue à la loi bien connue de l'électrocinétique.

• Exercice 18 : Tube de Pitot



On considère un fluide parfait incompressible, en écoulement stationnaire dans une conduite cylindrique horizontale de diamètre intérieur $d = 40$ mm, équipée de deux tubes plongeants dans le liquide, l'un débouchant en A face au courant, l'autre débouchant en B perpendiculairement aux lignes de courant (voir la figure ci-dessus). On admet que l'écoulement n'est pratiquement pas perturbé autour de B, et qu'il n'est modifié que localement autour de A. La différence de hauteur entre les surfaces libres du liquide en A′ et B′ est h.

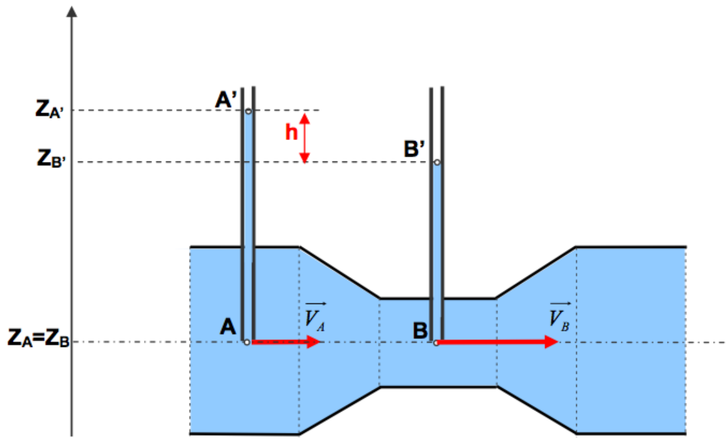
1) Déterminer la pression P_A au point A, en fonction de P_B, ρ et V, la vitesse d'écoulement (laminaire) du fluide dans la conduite.

2) Exprimer la vitesse V en fonction de h et de l'accélération de la pesanteur, g.

3) Calculer V numériquement pour $h = 3.2$ cm, $\rho = 1000$ kg/m^3 et $g = 9.81$ m/s^2.

• Exercice 19 : Tubes de Venturi

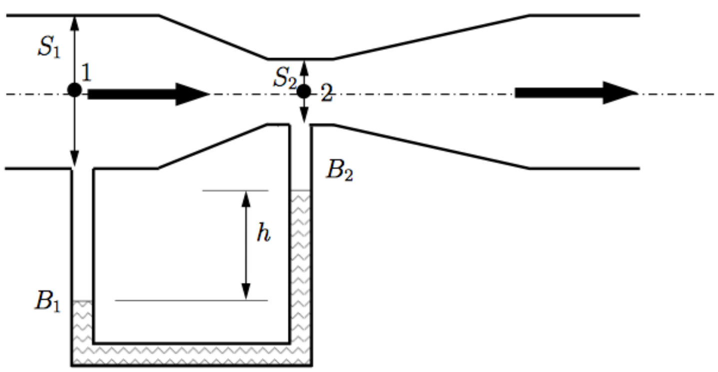
Un fluide parfait incompressible, de masse volumique ρ, s'écoule à l'intérieur d'une conduite de section principale S_A, qui subit un étranglement en B, où sa section est S_B. On désigne par $\alpha = S_A/S_B$ le rapport des sections. Deux tubes de petit diamètre plongent dans la conduite.



Leurs extrémités, en A et en B, sont à la même altitude, $z_A = z_B$. Les surfaces libres du fluide dans ces deux tubes ont une différence d'altitude h. Déterminer l'expression du débit volumique, q_V, du fluide, en fonction de h, de α, du diamètre d de la section principale, et de l'intensité du champ de pesanteur, g.

Effectuer l'application numérique, pour $d = 50$ mm, $\alpha = 2$, $g = 9.81$ m/s^2, $h = 10$ mm.

• Exercice 20 : Venturi bis



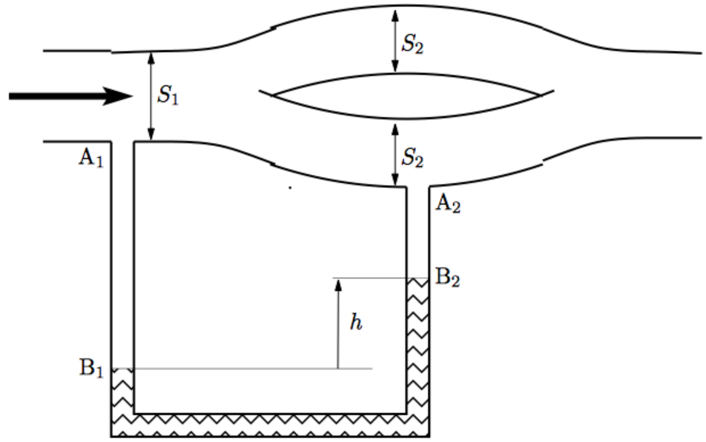
On considère le système ci-dessus, appelé Venturi, composé d'un rétrécissement suivi d'un élargissement. Sous les points 1 et 2 se trouvent deux orifices connectés à un tube en U, contenant du mercure. Un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ traverse le dispositif avec un débit volumique Q.

1) Exprimer la différence de pression entre les points 1 et 2, tout d'abord en fonction de la hauteur h, puis en fonction du débit Q.

2) En déduire une expression du débit Q en fonction de la différence de niveau, h, mesurée dans le tube.

3) A.N. : $\rho = 1000$ kg/m^3, $\rho_{\mathrm{Hg}} = 13\,600$ kg/m^3, $h = 10$ cm, $D_1 = 1$ cm, $D_2 = 5$ mm.

Un fluide parfait incompressible, de masse volumique ρ, s'écoule à l'intérieur d'une conduite de section principale S_A,



• Exercice 21 : Venturi ter

Un fluide parfait incompressible, de masse volumique ρ, s'écoule dans une conduite horizontale de section S_1, subissant localement une ramification en deux tuyaux de section identique S_2. On note ρ_m la masse volumique du fluide dans le tube en U. Donner l'expression de la différence d'altitude h (voir figure) en fonction du débit volumique Q, des masses volumiques des fluides et des sections S_1 et S_2. La hauteur h peut-elle être nulle ? Si oui, dans quelles conditions ?

• Exercice 22 : Glissement sur un plan incliné avec une couche d'huile !

Un corps de forme cubique, de masse $m = 1$ kg et de masse volumique $\rho = 5\,10^3$ kg/m^3, glisse sur un plan incliné dun angle $\alpha = 10°$ par rapport à l'horizontale, et recouvert dun film dhuile dépaisseur $e = 5\,\mu$m et de viscosité $\mu = 10^{-2}$ Pl. On suppose que la vitesse au sein du fluide varie linéairement entre le corps et le support.

1) Donner l'expression de la vitesse limite de glissement.

2) Effectuer l'application numérique. (L'accélération de la pesanteur vaut $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

• Exercice 23 : "Pertes de charge" dans une conduite cylindrique

Un fluide newtonien, de viscosité μ, s'écoule en régime laminaire au sein d'une conduite cylindrique horizontale, de section circulaire de rayon R. Le débit (volumique) de l'écoulement est noté Q.

1) Déterminer le champ de vitesse au sein de la conduite, ainsi que la vitesse maximale du fluide, v_max.

2) Déterminer la perte de pression sur une portion de longueur L de la conduite.

3) En déduire l'expression de la résistance hydraulique. (On pourra s'appuyer sur une analogie avec l'électrocinétique.)

4) Application numérique : un robinet de jardin est installé à 50 m de l'arrivée d'eau principale, où la pression vaut 3 bars. Le tuyau de raccordement utilisé pour rejoindre le robinet a un diamètre standard de 1 cm. Le débit volumique souhaité est de 0.4 litres par secondes. La viscosité de l'eau vaut 10^{-3} Pl. Calculer la pression en niveau du robinet de jardin.

• Exercice 24 : Viscosimètre à écoulement

Un réservoir de section circulaire et de rayon R_0 est rempli sur une hauteur h_0 d'un liquide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η. On effectue la vidange du réservoir à travers une conduite horizontale de longueur L, de section circulaire de rayon interne $R \ll R_0$, située en bas du réservoir. On admet que le régime d'écoulement peut être considéré à chaque instant comme un régime permanent et que le liquide est très proche de l'équilibre hydrostatique. On rappelle la formule de Poiseuille, donnant le débit volumique, Q_v, d'un tube de rayon R et de longueur L, pour une différence de pression ΔP entre ses extrémités :

$$Q_\text{v} = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}.$$

1) Au bout de quel intervalle de temps, Δt, le réservoir aura été vidé à moitié ? En déduire une méthode de mesure de la viscosité.

• Exercice 25 : Fluide et seringue

Une seringue est remplie d'un liquide parfait incompressible, de densité ρ. Le corps de la seringue est cylindrique, de diamètre intérieur D_1 et section S_1. L'aiguille, creuse, est également cylindrique, de diamètre intérieur D_2 et de section S_2. Elle est placée horizontalement et initialement fermée par un petit bouchon hermétique encastré à l'extrémité de l'aiguille, comme indiqué sur la Fig. 1. À l'extérieur règne une pression uniforme, notée P_0.

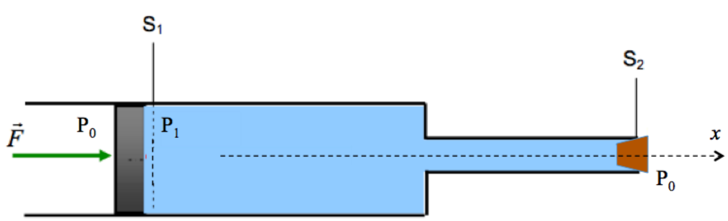


FIG. 1 – Seringue remplie d'un fluide incompressible, initialement bouchée à son extrémité.

A] Le bouchon est conçu de telle sorte que pour l'arracher de l'aiguille, il faut que s'exerce sur lui une force totale $\vec{F}_\text{out} = F_\text{out}\vec{u}_x$, parallèle à l'axe de la seringue et dirigée vers l'extérieur.

1) Un opérateur exerce au niveau du piston une force $\vec{F} = F\vec{u}_x$ (voir Fig. 1). Donner l'expression de la pression du fluide, P_1, au niveau du piston, en supposant que le bouchon reste fermé.

2) Donner l'expression de l'intensité minimale, F_min, de la force que l'opérateur doit exercer sur le piston pour que le bouchon soit expulsé hors de l'aiguille.

3) Calculer la valeur numérique de F_min, sachant que $F_\text{out} = 1$ N, $D_1 = 1$ cm et $D_2 = 1$ mm.

B] L'aiguille est dorénavant ouverte à l'air libre, et l'opérateur peut appliquer sur le piston une force quelconque, F. On note V_1 la vitesse du piston, et V_2 la vitesse du fluide au sortir de l'aiguille (cf. Fig. 2). On souhaite vider la seringue avec un débit volumique donné, qu'on notera Q_V.

4) Quelle est l'unité de Q_V dans le Système International ?

5) Déterminer la vitesse de sortie, V_2, en fonction de Q_V.

6) En déduire la vitesse du piston, V_1, en fonction de Q_V, D_1 et D_2.

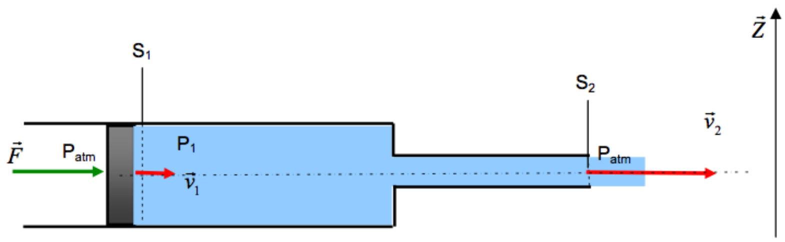


FIG. 2 – Écoulement du fluide hors de la seringue.

7) En déduire également la valeur de la pression du fluide, P_1, au niveau du piston.

8) Donner l'expression de la force F devant être appliquée par l'opérateur en fonction de Q_V et des autres données du problème.

9) Application numérique : calculer F pour un débit volumique $Q_\mathrm{V} = 10^{-3}$ S.I., $\rho = 950$ kg/m^3, $P_0 = 1$ atm, $D_1 = 1$ cm et $D_2 = 1$ mm.

C] Le liquide initialement contenu dans la seringue rempli le cylindre sur une longueur L (aiguille non comprise, de volume négligeable). L'opérateur vide entièrement la seringue avec un débit volumique Q_V constant.

10) Déterminer le travail total fourni par l'opérateur au cours de l'opération.

11) Calculer l'énergie cinétique totale du liquide éjecté hors de la seringue tout au long de l'opération.

12) Commenter.