

2) En l'absence de frottements, le corps est soumis à son seul poids :

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = m_1 \vec{g}$$

D'où $\vec{v}_1(t) = \vec{v}_1(0) + t\vec{g} = -gt\vec{u}_3$

et $z_1(t) = z_1(0) - \frac{1}{2}gt^2$, soit $z_1(t) = h_1 - \frac{1}{2}gt^2$

3) La durée de la chute, T , est telle que $z_1(T) = 0$.

D'où $T = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$

À l'instant $t=T$, on a $\vec{v}_1(T) = -gT\vec{u}_3 = -\sqrt{2gh_1}\vec{u}_3$

D'où $v_{s01} = \sqrt{2gh_1}$

4) A.N. $v_{s01} = 10 \text{ m.s}^{-1}$ et $T = 1 \text{ s}$.

5) On a $\vec{f} = -6\pi\mu R\vec{v}$. Le membre de gauche est une force, de dimension MLT^{-2} . Par ailleurs le produit

$R\vec{v}$ a pour dimension $L \times LT^{-1}$. Donc μ a pour dimension $\frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = \underline{ML^{-1}T^{-1}}$, d'unité S.I. $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

6) On a à présent $m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = m_1 \vec{g} - 6\pi\mu R_1 \vec{v}$, que l'on peut écrire sous forme canonique :

$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g}$, avec $\tau = \frac{m_1}{6\pi\mu R_1}$

②

La solution de cette équation différentielle du premier ordre à coefficients constants est bien connue. Pour la condition initiale $\vec{v}(t=0)=\vec{0}$, elle s'écrit :

$$\vec{v}'_i(t) = \vec{v}_{\text{lim}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

avec $\vec{v}_{\text{lim}} = \vec{g}\tau$, la vitesse limite atteinte asymptotiquement quand $t \rightarrow +\infty$.

7) Pour $t \ll \tau$, on a $\vec{v}'_i(t) \approx \vec{v}_{\text{lim}} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{t^2}{\tau^2}\right)\right)$,
soit $\vec{v}'_i(t) \approx \vec{g}t - \frac{1}{2}\vec{g} \frac{t^2}{\tau} \approx \vec{g}t \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t}{\tau}\right)$.

Or $\vec{v}_i(t) = \vec{g}t$. Donc $\vec{v}'_i(t) - \vec{v}_i(t) \approx \vec{v}_i(t) \times \frac{1}{2} \frac{t}{\tau}$.

En norme, on obtient donc, au 1^{er} ordre en $\frac{t}{\tau}$:

$$\frac{\delta v}{v}(t) = \frac{v'_i - v_i}{v_i} = \frac{1}{2} \frac{t}{\tau}.$$

8) L'écart relatif de vitesse est donc négligeable si $\frac{1}{2} \frac{t}{\tau} \ll 1$. L'écart maximal est obtenu à la fin de la chute, en $t=T$. Les frottements pourront donc être négligés si $\frac{1}{2} \frac{T}{\tau} \ll 1$, ou encore $T \ll 2\tau$, ce qui garanti si $T \ll \tau$.

9) A.N. : on a $\tau = \frac{m_i}{6\pi\mu R_i}$. D'où la contrainte $T \ll \frac{m_i}{6\pi\mu R_i}$.

Compte tenu de valeur de T ($T=1s$) et de μ ($\mu=1.8 \cdot 10^{-5} \text{ S.I.}$)
on a $\frac{m_i}{R_i} \gg 3.4 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^{-1}$

10) ρ étant fixée, on a $m_i = \frac{4}{3}\pi R_i^3 \times \rho$.

D'où $\frac{m_i}{R_i} = \frac{4}{3}\pi \rho R_i^2$. La contrainte s'écrit donc
 $R_i^2 \gg \frac{3}{4\pi\rho} \times (3.4 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^{-1})$

Cette condition est d'autant mieux vérifiée que R_i est grand.

11) qualitativement, cela se comprend ainsi : pour une masse volumique donnée, la masse, et donc le poids, augmentent avec le rayon comme R^3 , tandis que la force de frottement augmente seulement comme R . Aussi, plus R est grand, plus le "poids relatif" des frottements par rapport au poids diminue. Les frottements peuvent donc être d'autant plus négligés.

12) A.N. : le caoutchouc flotte légèrement dans l'eau, et a donc une masse volumique légèrement inférieure à celle de l'eau - disons $\rho_c \approx 0.9 \rho_{\text{eau}} \approx 900 \text{ kg.m}^{-3}$.

Les frottements seront donc négligeables dès lors que
 $R_1 \gg \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho} \times (3.4 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^{-1})} \approx 3 \times 10^{-4} \text{ m} \approx \underline{0.3 \text{ mm}}$.

Dans le cas de l'acier, on peut estimer une densité de l'ordre de 8. D'où $\rho_a \approx 8 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, ce qui conduit à une contrainte $\sim \sqrt{8}$ fois moins stricte, soit
 $R_1(\text{acier}) \gg 0.1 \text{ mm}$.

Ainsi, même pour une petite bille en acier, d'un rayon de quelques millimètres, les frottements pourront être négligés sur la durée de la chute.

13) le vecteur $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation du référentiel terrestre par rapport à un référentiel galiléen. //

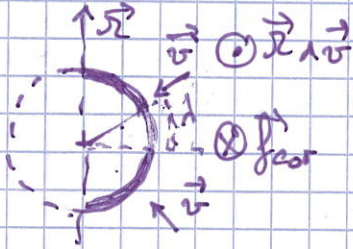
14) $\vec{\Omega}$ est dirigé le long de l'axe des pôles, orienté du pôle sud au pôle nord. Sa norme est la.

(4)

vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même, correspondant à un tour par jour sidéral, soit $\sim 23\text{h}56\text{min} \sim 86160\text{s}$:

$$\Omega \approx \frac{2\pi}{86160} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

15/



La force de Coriolis dépend de l'angle entre $\vec{\Omega}$ et $\vec{v}$ (ici, la verticale), et donc de la latitude.

On voit clairement sur le dessin que, pour un corps en chute libre sur le méridien représenté en trait plein (à droite), on $\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ sortant de la feuille, donc $\vec{f}_{\text{Coriolis}}$ entrant dans la feuille, ce qui correspond à la direction de l'est.

L'invariance par rotation garantit que ce sera le cas pour tout méridien, et donc partout sur la planète.

Pour une même vitesse, $\|\vec{\Omega} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{\Omega}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin \theta|$ est maximal lorsque $\sin \theta$, où θ est l'angle entre $\vec{\Omega}$ et la verticale locale, est maximal.

C'est le cas à l'équateur ($\sin \theta = 1$).

C'est donc là que l'effet sera maximal.

16/ Pour un corps tombant d'une hauteur h à la latitude, la vitesse est maximale en fin de chute : $v_{\text{max}} = \sqrt{2gh}$.

D'où $\underline{\underline{\delta_{\text{max}} = 2.m.\Omega \times \sqrt{2gh} \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2\sqrt{2}m\Omega\sqrt{gh} \cos \theta}}$

17/ Si cette force s'appliquait de façon constante tout

5
au long de la chute, le décalage vers l'est serait

$$\delta \approx \frac{1}{2} \frac{g}{m} T^2, \text{ où } T \text{ est la durée de la chute. (puis l'accélération serait } \frac{g}{m}).$$

On peut donc estimer une limite supérieure à la déviation vers l'est : $\delta \leq \frac{1}{2} m g_{c, \max} \times \frac{2h}{g}$

$$\text{D'où } \boxed{\delta \leq 2\sqrt{2} \Omega \sqrt{\frac{h^3}{g}} \cos \alpha}$$

18) Dans les conditions de l'expérience, on a $\boxed{\delta \leq (7.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}) \times \cos \alpha}$
Même à l'équateur, la déviation serait inférieure au millimètre. Elle peut donc être négligée.

II - 19) On a $m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = m_2 \vec{g}$, soit $\boxed{\frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{g}}$

20) L'intégration donne à l'évidence $\vec{v}_2(t) = \vec{v}_2(0) + \vec{g}t$,
soit
$$\begin{cases} \dot{x}_2 = v_0 \cos \alpha \\ \dot{z}_2 = v_0 \sin \alpha - gt \end{cases}$$

et donc
$$\begin{cases} x_2(t) = v_0 \cos \alpha t \\ z_2(t) = h_2 + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

21) Le mouvement du corps 1 est purement vertical, à l'abscisse $x_1 = d$. Si une collision a lieu, ce sera donc à cette abscisse, et elle aura donc lieu à l'instant t_c tel que $x_2(t_c) = v_0 \cos \alpha t_c = d$, soit $\boxed{t_c = \frac{d}{v_0 \cos \alpha}}$.

Il reste à s'assurer qu'à cet instant-là, les deux balles seront à la même hauteur: $z_1(t_c) = z_2(t_c)$.

Il faut donc:
$$h_1 - \frac{1}{2}gt_c^2 = h_2 + v_0 \sin \alpha t_c - \frac{1}{2}gt_c^2,$$

soit $v_0 \sin \alpha t_c = h_1 - h_2$, ou encore $v_0 \sin \alpha \times \frac{d}{v_0 \cos \alpha} = h_1 - h_2$.

D'où la condition $\boxed{\tan \alpha = \frac{h_1 - h_2}{d}}$

Le point de collision aura alors les coordonnées suivantes:

$x_c = d$, $z_c = h_1 - \frac{1}{2} \frac{gd^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$.

22) Il est remarquable que la condition de collision ne dépende pas de la vitesse de projection, mais uniquement de l'angle initial! Quelle que soit la vitesse de lancement, si l'angle est le bon, la collision aura lieu!!!

Il y a toutefois une restriction: il faut que le point de collision soit situé au dessus du sol, c'est-à-dire que $z_c > 0$, ou $h_1 > \frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$.

Une autre façon de dire la même chose, est que l'instant de la collision, t_c , soit antérieur à la fin de la chute $t_c < T$, soit

$\frac{d}{v_0 \cos \alpha} < \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$ — ce qui est bien!

Évidemment la même condition!

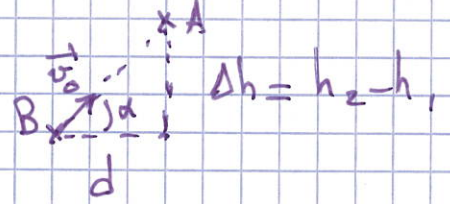
Ainsi, si l'angle est le bon, il faut simplement s'assurer que la vitesse initiale soit suffisante pour que le projectile dépasse l'abscisse $x=d$ avec que le corps 1 n'arrive au sol.

$\boxed{v_0 \cos \alpha > d \sqrt{\frac{g}{2h_1}}}$.

(7)

23) La condition obtenue s'écrit $\tan \alpha = \frac{h_2 - h_1}{d} \Rightarrow \frac{\Delta h}{d}$

En se reportant au schéma ci-contre, il apparaît que cette condition équivaut à



demandar que la vitesse du projectile pointe initialement vers la cible.

N'est-ce pas merveilleux?!

24) Compte tenu de la discussion de la question 22), il apparaît que si $\tan \alpha = \frac{\Delta h}{d}$, la collision aura lieu quelle que soit v_0 , pourvu qu'elle soit supérieure à la vitesse minimale donnée par $v_{0,\min} = \frac{d}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2h_1}}$.

Pour $v_0 \geq v_{0,\min}$, la collision aura lieu d'autant plus tôt, et donc plus haut, que v_0 est grande.

III -

25) Le principe d'équivalence énonce que la masse inertielle d'un corps est égale à sa masse gravitationnelle.

26) Le référentiel $\mathcal{R}^*$ n'étant pas galiléen, il convient d'écrire la relation fondamentale de la dynamique en incluant les forces d'inertie. Dans la mesure où $\mathcal{R}^*$ est en translation uniformément accélérée par rapport à un référentiel galiléen, avec l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e = \vec{g}$, les forces d'inertie se réduisent ici à la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_e = -m\vec{a}_e = -m\vec{g}$.

(8)

L'équation du mouvement de chaque balle est alors, dans R^* .

$$m \frac{d\vec{v}^*}{dt} = m\vec{g} + \vec{f}_e = m\vec{g} - m\vec{g} = \vec{0}.$$

Autrement dit, $\frac{d\vec{v}^*}{dt} = \vec{0}$.

27) Ainsi, pour les deux corps, $\vec{v}^* = c\vec{e}$.

Le corps 1, initialement au repos dans R^* , reste au repos.

Le corps 2 garde sa vitesse constante dans R^* : son mouvement est donc rectiligne uniforme.

28) Il apparaît donc parfaitement évident que, pour obtenir une collision, il faut et il suffit que le projectile soit lancé en direction de la cible. Dans R^* , la somme des forces est nulle, la cible ne se déplace pas, et le projectile va simplement tout droit, dans la direction initiale.

Or à $t=0$, R et R^* coïncident, puisque $\vec{v}_{R^*/R} = \vec{0}$. Les vitesses dans R et dans R^* sont donc identiques.

$$\vec{v}_R = \vec{v}_{R^*} + \vec{v}_{R^*/R} \quad (\text{loi de composition des vitesses (non relativiste)}).$$

La condition de collision est donc simplement que

$\vec{v}_0$ pointe de B vers A, c'est-à-dire que $\tan \alpha = \frac{h_1 - h_2}{d}$.

C'est bien sûr la même condition que celle obtenue précédemment. Quant au lieu de la collision, il est bien sûr, dans R^* , là où se trouve la cible au départ, puisque celle-ci reste fixe! L'instant de la collision est évident, c'est le temps qu'il faut au projectile pour parcourir la distance

qui le sépare de la cible à vitesse constante, soit

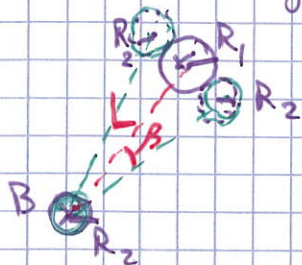
$$t_c = \frac{L}{v_0} = \frac{\sqrt{\Delta h^2 + d^2}}{v_0} = \frac{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + d^2}}{v_0}$$

On peut introduire $\cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{\Delta h^2 + d^2}}$. D'où $t_c = \frac{d}{v_0 \cos \alpha}$,
en conformité avec le résultat précédent.

29) En résumé, dans $\mathcal{R}^*$, le traitement du problème est trivial, puisque tout se passe comme s'il n'y avait aucune force s'exerçant sur les corps. Dans le référentiel terrestre, la situation semble bien différente — et bien plus compliquée ! — parce que les deux corps sont soumis à leur poids. Mais ce n'est qu'une complication apparente, puisqu'en vertu du principe d'équivalence, les deux corps "tombent de la même façon". C'est une propriété tout à fait remarquable, que Galilée avait déjà comprise et mise en lumière explicitement.

Dès lors, qu'il y ait une accélération de la pesanteur ou non, et quel que soit sa norme ou sa direction (dès lors qu'elle est uniforme), qu'on soit sur Terre, sur la Lune, sur Mars ou en apesanteur, c'est exactement le même problème. Le défi de la professeure, in fine, n'était pas plus difficile à relever que celui qui consiste, sur un tapis de billard, à atteindre une boule au repos en lançant vers elle une autre boule. Il suffit de viser dans la bonne direction !
Vive la Physique !!!

30) Ce qui précède permet de comprendre comment résoudre le problème dans le cas où le rayon des balles n'est pas nul. Il suffit à nouveau de se placer dans le référentiel en chute libre, R^* .



Dans ce référentiel la balle de rayon R_1 est immobile.

Pour la toucher, la balle de rayon R_2 devra être lancée directement vers elle (angle α précédent), avec une tolérance de précision de $\pm \beta$, où β peut se lire sur la figure:

$$\tan \beta \approx \frac{R_1 + R_2}{L}$$

(pour $L \gg R_1, R_2$).

où $L = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + R^2}$ est la distance entre A et B.

IV -

31) Dans R^* , on a $\vec{v}_1^* = \vec{0}$ et $\vec{v}_2^* = \vec{v}_0$. (car $\vec{v}_1^* = \vec{v}_0$ avant le choc)

32) Pour un choc "bille en tête",

les vitesses après le choc sont dans la même direction que $\vec{v}_0$. Définissons le vecteur unitaire correspondant $\vec{u}$:

$$\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}$$

On a alors $\vec{v}_1^{*'} = v_1^{*'} \vec{u}$ et $\vec{v}_2^{*'} = v_2^{*'} \vec{u}$.

La conservation de la quantité de mouvement au cours du choc donne : $m_1 v_1^{*'} + m_2 v_2^{*'} = m_2 v_0$.

La conservation de l'énergie (choc élastique) donne :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} = \frac{1}{2} m_2 v_0^2 = \frac{1}{2} m_2 v_0^2$$

Il suffit de résoudre ce système de 2 équations à 2 inconnues;

On obtient, en portant la 1^{ère} équation au carré; et en introduisant le rapport $\boxed{r = \frac{m_1}{m_2}}$. ($r v_1^{*'} + v_2^{*'} = v_0$).

$$r^2 v_1^{*'}^2 + v_2^{*'}^2 + 2r v_1^{*'} v_2^{*'} = v_0^2$$

Et par ailleurs, $r v_1^{*'}^2 + v_2^{*'}^2 = v_0^2$.

D'où $(r^2 - r) v_1^{*'}^2 + 2r v_1^{*'} v_2^{*'} = 0$, soit $v_2^{*'} = \frac{1-r}{2} v_1^{*'}$

D'où $(r + \frac{1-r}{2}) v_1^{*' } = v_0$,

et finalement

$$\boxed{v_1^{*' } = \frac{2}{r+1} v_0}$$

et

$$\boxed{v_2^{*' } = \frac{1-r}{1+r} v_0}$$

(si $v_1^{*' } \neq 0$,
c'est si la collision
a lieu).

33) Si $m_1 = m_2$, alors $r=1$, et l'on a $v_2^{*' } = 0$, et $v_1^{*' } = v_0$.

Le corps 2 communique sa vitesse au corps 1, et s'immobilise.

34) La vitesse de $\mathcal{R}^*$ est celle d'un corps accéléré à l'accélération $\vec{g}$ à partir de $\vec{v} = \vec{0}$ à $t=0$.

Donc

$$\boxed{\vec{v}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}_T} = \vec{g}t}$$

35) On a la loi de composition des vitesses; $\vec{v}_{\mathcal{R}_T} = \vec{v}_{\mathcal{R}^*} + \vec{v}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}_T}$

D'où $\boxed{\vec{v}_1^{*' } = \vec{v}_1^{*' } - \vec{g}t_c}$ et $\boxed{\vec{v}_2^{*' } = \vec{v}_2^{*' } - \vec{g}t_c}$.

Si les masses sont identiques, $\boxed{\vec{v}_1^{*' } = \vec{v}_0 - \vec{g}t_c}$ et $\boxed{\vec{v}_2^{*' } = -\vec{g}t_c}$

36) On voit dans les expressions ci-dessus que le corps 1 a, après la collision, exactement la vitesse qu'avait le corps 2 juste avant la collision. Même chose pour l'autre corps. Les deux corps ont simplement échangé leurs vitesses. C'est vrai dans $\mathcal{R}^*$; il ne peut en être autrement dans $\mathcal{R}_T$!

V- 37) La seule force exercée - le poids - est conservative et dérive de l'énergie potentielle $E_p = mgy$.

L'énergie mécanique $E_c + E_p$ est donc conservée, et l'on a :

$$E_c(0) + E_p(0) = E_c(T) + E_p(T),$$

$$\text{soit } 0 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2 + 0, \quad \text{soit } v = \sqrt{2gh_1}.$$

Ainsi $\vec{v} = -\sqrt{2gh_1} \vec{u}_3$.

38) Au cours de la chute, la balle n'est soumise qu'à son poids, dont le point d'application résultant se trouve au centre de masse, et donc au centre de la balle sphérique homogène. Le moment de cette force, calculé au point G, est donc nul. Le théorème du moment cinétique appliqué au point G indique donc que $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \sum \vec{c}_G = \vec{0}$, et que $\vec{L}_G = J \vec{\Omega} = c \vec{e}$. D'où $\vec{\Omega} = c \vec{e}$, et donc $\vec{\Omega} = \vec{0}$.

Lorsque la balle touche le sol, une force de contact se manifeste $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$, où $\vec{R}_N$ est la composante normale et $\vec{R}_T$ la composante tangentielle.

En l'absence de rotation ($\vec{\Omega} = \vec{0}$), la composante tangentielle est nulle, ne serait que pour des raisons de symétrie autour de la verticale.

Ainsi, la force de contact est normale et la quantité de mouvement, donc la vitesse, ne peut varier que selon cette direction : la verticale.

Ainsi $\vec{v}$ est toujours dirigé suivant $\vec{u}_3$.

En revanche, si la balle parvient au sol avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}$, alors de point de la balle en contact avec

le sol a une vitesse tangentielle non nulle :

$$\begin{aligned}\vec{v}_I &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OI} = v \vec{u}_y + R\omega \vec{u}_y \wedge (-\vec{u}_z) \\ &= v \vec{u}_y - R\omega \vec{u}_x.\end{aligned}$$

Ainsi, si $\omega > 0$, le point coïncident I (sur la balle) tend à glisser sur le sol dans la direction $-\vec{u}_x$. La présence de frottements implique alors l'apparition d'une force de contact tangentielle s'opposant à glissement, et donc dirigée suivant $\vec{u}_x$. Cette force est la seule à s'exercer horizontalement, et par conséquent la balle va rebondir en se déplaçant vers les x croissants. Ce résultat est tout à fait conforme à l'intuition : la balle en rotation "prend appui" sur le sol et se propulse latéralement.

NB: Si $\omega < 0$, un raisonnement analogue montre qu'une force de frottement dirigée suivant $-\vec{u}_x$ apparaît, justifiant que la balle rebondisse vers les x décroissants.

39) Par définition, on a $E_c(\text{après}) = \frac{1}{2} E_c(\text{avant})$,
soit $v' = \sqrt{\frac{1}{2}} v$, et donc $\vec{v}' = \sqrt{\frac{1}{2}} \times 2gh_1 \vec{u}_y$.

40) A l'évidence $r = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

41) La conservation de l'énergie (cf. plus haut) implique :

$$\frac{1}{2} m v'^2 = m g z'_{\max}, \text{ soit une hauteur de rebond}$$

$$m g z'_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m g h_1, \text{ et donc } z'_{\max} = \frac{1}{2} h_1.$$

42) Il suffit d'écrire $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = m(\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_1})\vec{u}_3$,
 D'où $\boxed{\vec{p}_1 = m\sqrt{2gh_1}(\sqrt{\frac{2}{3}} + 1)\vec{u}_3}$

43) Si la force de contact est purement normale à la surface, alors son support passe par G (centre de la balle), puisque le point d'application est I (à la verticale de G). Ainsi, son moment est nul par rapport à G, et le théorème du moment cinétique implique que $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \sum \vec{\sigma}_G = \vec{0}$ (le moment du poids étant nul, lui aussi),
 et donc $\vec{L}_G = c\vec{e}$, soit $J\vec{\Omega} = c\vec{e}$
 et donc $\boxed{\vec{\Omega} = \vec{0}}$.

44) Voir la réponse à la question 38).

L'apparition d'une force tangentielle, appliquée au point I, induit un moment $\vec{\sigma}_G(\vec{R}_t) = G\vec{I} \wedge \vec{R}_t$.

Or $\vec{R}_t$ s'oppose au glissement de la balle sur le support.

Au point de contact, I, on a pour le point coïncident de

la balle: $\vec{v}_I^{(balle)} = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \wedge G\vec{I} = \vec{v}_G$ (si $\vec{\Omega} = \vec{0}$),

et pour le point du sol, $\vec{v}_I^{(sol)} = \vec{0}$.

La "vitesse de glissement", composante tangentielle de la vitesse relative $\vec{v}_I^{(balle)} - \vec{v}_I^{(sol)} = \vec{v}_G$, est à dire $v_0 \cos \alpha \vec{u}_x$.

La force tangentielle est donc suivant $-\vec{u}_x$: $\vec{R}_t = \|\vec{R}_t\| \vec{u}_x$.

Ainsi $\vec{\sigma}_G(\vec{R}_t) = R_2 \times \|\vec{R}_t\| (-\vec{u}_3) \wedge (-\vec{u}_x) = R_2 \|\vec{R}_t\| \vec{u}_y$.

Le théorème du moment cinétique implique, à chaque instant où $\vec{R}_t$ est présente (càd "pendant le choc"): $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\sigma}_G(\vec{R}_t)$,

d'où $\frac{d\vec{L}}{dt} = R_2 \times \|\vec{R}_t\| \vec{u}_y$. Le vecteur rotation après le choc est donc bien dirigé suivant $\vec{u}_y$.

45) On a $\vec{G} = J\vec{\omega} = J\omega \vec{u}_y$ et $\vec{G}' = J\omega' \vec{u}_y$.

46) Le théorème du centre d'inertie s'écrit $m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{f} = m\vec{g} + \vec{R}_T + \vec{R}_N$

En projection sur $\vec{u}_x$, cela donne $m \frac{dv_x}{dt} = \vec{R}_T \cdot \vec{u}_x = -\|\vec{R}_T\|$

En projection sur $\vec{u}_z$: $m \frac{dv_z}{dt} = -mg + \vec{R}_N \cdot \vec{u}_z = -mg + \|\vec{R}_N\|$

En intégrant de t_0 à $t_0 + \delta t$, on obtient:

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t} m \frac{dv_x}{dt} dt = \underline{mv'_x - mv_x} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t} \vec{R}_T \cdot \vec{u}_x dt = \underline{\mathcal{P}_x}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t} m \frac{dv_z}{dt} dt = \underline{mv'_z - mv_z} = -mg\delta t + \int_{t_0}^{t_0+\delta t} \vec{R}_N \cdot \vec{u}_z dt = \underline{\mathcal{P}_z}$$

(NB: au cours du choc, la variation de l'impulsion due au poids est négligeable: $\lim_{\delta t \rightarrow 0} -mg\delta t = 0$).

Le théorème du moment cinétique s'écrit $\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{\sigma}_G(\vec{f})$,

$$\begin{aligned} \text{d'où } J \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_y &= \vec{\sigma}_G(m\vec{g}) + \vec{\sigma}_G(\vec{R}_T) + \vec{\sigma}_G(\vec{R}_N) \\ &= \vec{0} + R_2 \times \|\vec{R}_T\| \vec{u}_y + \vec{0} \end{aligned}$$

et donc $J \frac{d\omega}{dt} = R_2 \times \|\vec{R}_T\|$.

En intégrant entre t_0 et $t_0 + \delta t$, on obtient:

$$\underline{J\omega' - J\omega} = R_2 \int_{t_0}^{t_0+\delta t} \vec{R}_T \cdot \vec{u}_x dt = \underline{-R_2 \mathcal{P}_x}$$

En résumé, nous avons bien 3 équations reliant les 5 inconnues.

$$\begin{cases} v'_x - v_x = \frac{\mathcal{P}_x}{m} \\ v'_z - v_z = \frac{\mathcal{P}_z}{m} \\ \omega' - \omega = -\frac{R_2}{J} \mathcal{P}_x \end{cases}$$

47) La condition de non glissement implique que la balle, au contact du sol, adopte une rotation "accordée" à son mouvement longitudinal le long de $\vec{u}_x$, de sorte que la vitesse du point coïncident au point de contact soit nulle.

$$\text{Or } \vec{v}'_{\neq}(\text{balle}) = \vec{v}'_G + \vec{\Omega}' \wedge \overrightarrow{GI} = \vec{v}'_G + \omega' R_2 \vec{u}_y \wedge (-\vec{u}_z) \\ = \vec{v}'_G - R_2 \omega' \vec{u}_x = (v'_x - R_2 \omega') \vec{u}_x + v'_z \vec{u}_z$$

Une absence de glissement sur le sol implique donc:

$$\boxed{v'_x - R_2 \omega' = 0}$$

48) La cinquième équation requise est, d'après l'énoncé, $\boxed{v'_z = -\Gamma v'_x}$, avec $\Gamma = \sqrt{\frac{5}{2}}$, d'après la question 40).

Il suffit donc de résoudre le système. Il s'agit en fait d'un système découplé: 2 équations à 2 inconnues, v'_z et $\mathcal{B}_z$ et 3 équations à 3 inconnues, v'_x , ω' , $\mathcal{B}_x$.

C'est ce dernier sous-système qui nous intéresse:

$$\omega' = \frac{v'_x}{R_2}, \text{ d'où } \frac{v'_x}{R_2} - \omega' = -\frac{R_2 \mathcal{B}_x}{J}$$

$$\text{Or } \mathcal{B}_x = m(v'_x - v_x). \text{ Donc } \frac{v'_x}{R_2} - \omega' = -\frac{m R_2 (v'_x - v_x)}{J}, \\ \text{soit } v'_x \left(1 + \frac{m R_2^2}{J}\right) = \frac{m R_2^2}{J} v_x + R_2 \omega'$$

$$\text{Or } \frac{m R_2^2}{J} = \frac{5}{2}. \text{ D'où } \boxed{v'_x = \frac{5}{7} v_x + \frac{2}{7} R_2 \omega'}$$

$$\text{On en déduit } \omega' = \frac{v'_x}{R_2}, \text{ d'où } \boxed{\omega' = \frac{5}{7} \frac{v_x}{R_2} + \frac{2}{7} \omega}$$

49) Au premier rebond, on a $\omega = 0$.

$$\text{D'où } \boxed{\omega' = \frac{5}{7} \frac{v_x}{R_2} = \frac{5}{7} \frac{v_0 \cos \alpha}{R}}$$

50) On aura en effet $v'_x = 0$, si $\boxed{\omega = -\frac{5}{2} \frac{v_x}{R_2} < 0}$ (contrerotation).

VI -

51) Un œil sain de référence observe sans accommoder un objet à l'infini. L'image du réticule doit donc se former à l'infini (faisceau parallèle).

52) Pour former une image à l'infini, il convient de placer l'objet dans le plan focal objet de la lentille, soit en l'occurrence à une distance f'_2 en amont de la lentille L_2 .

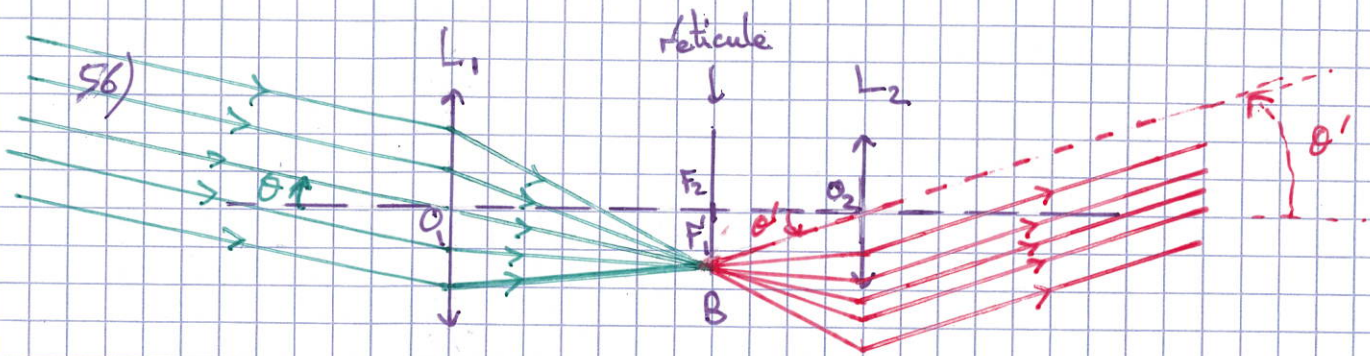
53) L'objet à l'infini aura son image intermédiaire dans le plan focal image de la première lentille. Si l'on veut qu'elle coïncide avec le réticule, il faut donc placer celui-ci dans le plan focal image de L_1 , soit en $x = f'_1$.

On aura alors une distance $f'_1 + f'_2$ entre les deux lentilles.

54) On dit que le système est afocal, car il n'a pas de foyers ou plus exactement ceux-ci sont rejetés à l'infini.

En effet, un faisceau parallèle incident sortira de l'instrument comme un faisceau parallèle.

55) Les conditions de Gauss imposent de se limiter à des rayons "peu inclinés" par rapport à l'axe optique, et ne s'éloignant "pas trop" de celui-ci. Concrètement, "peu incliné" signifie incliné d'un angle α tel qu'on puisse considérer que $\alpha = \sin \alpha = \tan \alpha$. Et "pas trop éloigné" signifie éloigné d'une distance petite par rapport aux rayons de courbure des dioptries constituant les lentilles (ou miroirs).



57) Par définition, le grossissement angulaire est $G = \frac{\theta'}{\theta}$, où θ est l'angle sous lequel l'objet est vu en l'absence d'instrument, et θ' l'angle sous lequel il est vu à travers l'instrument.

Ici, on a, d'après le schéma, $\tan \theta = \frac{F_2 B}{f_1}$,
et $\tan \theta' = \frac{F_2 B}{f_2} = - \frac{F_2 B}{f_2}$.

D'où $G_{\infty} = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\tan \theta'}{\tan \theta} = - \frac{f_1}{f_2}$

58) A.N.: $G = -4$. ($G < 0$ signifie que l'image est renversée)!

59) Si O_1 est le centre de la lentille, et f_1' sa distance focale, on peut un objet A sur l'axe, une image A' sur l'axe telle que

$$\frac{1}{\overline{O_1 A'}} - \frac{1}{\overline{O_1 A}} = \frac{1}{f_1'}$$

Ainsi, pour $\overline{O_1 A} = D$, on a $\overline{O_1 A'} = \frac{f_1' \overline{O_1 A}}{f_1' + \overline{O_1 A}} = \frac{D f_1'}{D - f_1'}$

60) Pour un objet à l'infini, on a $\overline{O_1 A'} = f_1'$.

Le recul nécessaire est donc $\Delta x = \frac{D f_1'}{D - f_1'} - f_1' = \frac{f_1'^2}{D - f_1'}$

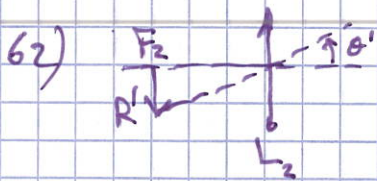
puisque'il s'agit toujours de faire coïncider le foyer objet de l'oculaire avec la position de l'image intermédiaire donnée par l'objectif.

61) Le grossissement (transversal) fourni par la lentille L_1 s'écrit $g = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{QA'}}{\overline{QA}} = \frac{f'_1}{f'_1 + \overline{OA}}$ (voir ci-dessus)

$$= -\frac{f'_1}{D - f'_1}$$

Le rayon de l'image intermédiaire est donc :

$$R' = R \times |g| = \frac{f'_1 R}{D - f'_1}$$



Le rayon issu du bord de la balle et passant par le centre de l'oculaire n'est pas dévié. Il est donc vu, par rapport à un rayon issu du centre de la balle, avec une inclinaison

$$\theta' \approx \tan \theta' \approx \frac{R'}{f'_2} = \frac{f'_1}{f'_2} \frac{R}{D - f'_1}$$

(Tel est le rayon angulaire observé, le diamètre angulaire est bien sûr le double de celui-ci).

En l'absence d'instrument, la balle, située à la distance D , serait vue avec le rayon angulaire $\theta \approx \tan \theta \approx \frac{R}{D}$.

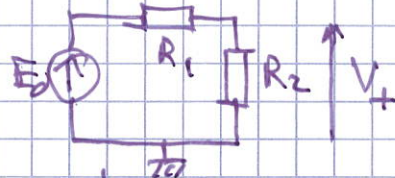
D'où le grossissement $|G(D)| = \left| \frac{\theta'}{\theta} \right| = \frac{f'_1}{f'_2} \frac{D}{D - f'_1}$

Finalement, le rapport des grossissements est $\rho = \frac{G(D)}{G_\infty} = \frac{D}{D - f'_1}$, qui est proche de 1 pour $D \gg f'_1$.

63) A.N. : on trouve $\Delta x = \frac{f_1'^2}{D - f'_1} \approx \underline{\underline{4.1 \text{ mm}}}$ et $\rho \approx \underline{\underline{1.02}}$.

VII -

64) Le potentiel V_+ s'obtient à partir de la portion de schéma suivante:



C'est un diviseur de tension classique; $V_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_0$.

Ici, on a $R_2 = R_2(E) = \frac{k}{E}$. D'où $V_+ = \frac{k}{k + R_1 E} E_0$.

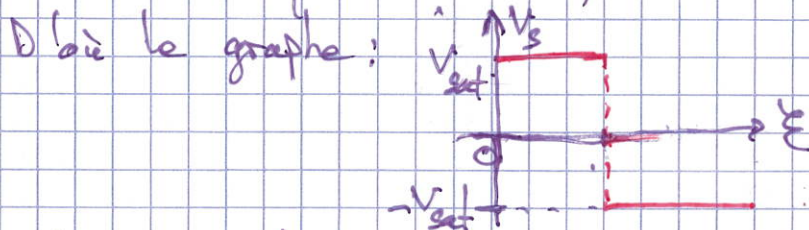
65) L'ampli-op est en mode saturé. Si $V_+ > V_-$, $V_s = V_{sat} = 15V$.
Si $V_+ < V_-$, $V_s = -V_{sat} = -15V$.

Ici, $V_- = E_{ref}$. Donc $V_+ > V_- \Leftrightarrow \frac{k E_0}{k + R_1 E} > E_{ref}$

$$\Leftrightarrow k(E_0 - E_{ref}) > R_1 E E_{ref}$$

Donc $V_+ > V_- \Leftrightarrow E < E_0$, où $E_0 = \frac{k}{R_1} \frac{E_0 - E_{ref}}{E_{ref}}$

Il apparaît donc un éclaircissement critique au-dessus duquel $V_s = V_{sat}$, et au-dessous duquel $V_s = -V_{sat}$.

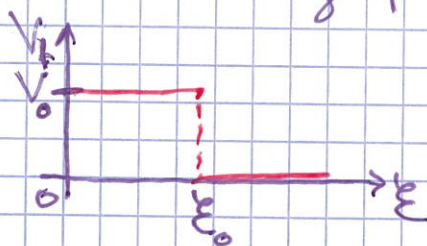


66) D'après le schéma, si $V_s = V_{sat}$, la diode est bloquée, et $V_+ = V_{sat} - R_4 i_s$, où i_s est le courant de sortie de l'ampli-op, qui dépend de la charge (en aval des pointillés).

Si l'impédance d'entrée de la charge est infinie, $i_s = 0$ et $V_+ = V_{sat}$.

A l'inverse, si $V_s = -V_{sat}$, la diode est passante et $V_+ = 0$.

On peut donc tracer le graphe suivant :



où $V_o = \frac{R_e}{R_e + R_x} V_{sat}$, où

R_e est la résistance d'entrée de la charge en aval du circuit,

67) Pour que le passage de la balle projectile fasse basculer la sortie du montage (et donc actionne le relais à distance), il faut (et il suffit) que l'éclairement soit inférieur à E_0 lorsque la balle s'interpose entre la LED et la photorésistance, et supérieure à E_0 dans le cas contraire. On veut donc $E_0 > E_{bas}$, et $E_0 < E_{haut}$.

En reportant l'expression de E_0 , on obtient :

$$R_i < \frac{k}{E_{bas}} \frac{E_0 - E_{ref}}{E_{ref}} \quad \text{et} \quad R_i > \frac{k}{E_{haut}} \frac{E_0 - E_{ref}}{E_{ref}}$$

L'application numérique donne :

$$10 \text{ k}\Omega < R_i < 1 \text{ M}\Omega$$

VIII -

68) $\begin{array}{c} I(x,t) \lambda dx \\ \rightarrow \text{---} \\ \leftarrow u_L \\ \text{---} \end{array}$

Avec les conventions ci-contre, on a:

$$u_L = \lambda dx \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}$$

$\begin{array}{c} u_C \uparrow \\ \text{---} \frac{1}{\gamma} q_0 \text{---} \\ \text{---} -q_0 \text{---} \end{array} \lambda dx$

Avec les conventions ci-contre,

$$u_C = \frac{q_0}{\gamma dx}$$

69) La loi des mailles donne: $V(x,t) = u_L + V(x+dx,t)$, soit:

$$V(x+dx,t) - V(x,t) = -\lambda dx \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}, \text{ ou encore;}$$

dans la limite $dx \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}$$

La loi des nœuds donne, en notant $i_0 = \frac{dq_0}{dt}$ le courant dans le condensateur: $I(x,t) = I(x+dx,t) + i_0$

$$= I(x+dx,t) + \gamma dx \frac{du_C}{dt}$$

Or $\frac{du_C}{dt} = \frac{\partial V(x+dx,t)}{\partial t}$

D'où $\frac{I(x+dx,t) - I(x,t)}{dx} = -\gamma \frac{\partial V(x+dx,t)}{\partial t}$

Dans la limite $dx \rightarrow 0$, on a donc:

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$

En dérivant par rapport à x l'équation donnant $\frac{\partial V}{\partial x}$ et par rapport à t celle donnant $\frac{\partial I}{\partial t}$, et en notant que $\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x}$, on obtient aisément:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = \lambda \gamma \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2}$$

En procédant de même pour I (dérivant $\frac{\partial I}{\partial x}$ par rapport à x et $\frac{\partial V}{\partial t}$ par rapport à t), on obtient

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2} = \lambda \gamma \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2}$$

20) Il apparaît que I et V satisfaisant la même équation:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = 0$$
, avec $c = \frac{1}{\sqrt{LY}}$.

21) A.N.: On obtient $c = 200\,000 \text{ km/s}$, soit $\sim \frac{2}{3}$ de la vitesse de la lumière dans le vide.

IX-

22) On a $Z_{AB} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$, où Z_1 est l'impédance équivalente de la branche r, L, C_1 en série, et $Z_2 = \frac{1}{jC_2 \omega}$.

Ici, $Z_1 = r + j\omega L + \frac{1}{jC_1 \omega}$. D'où $Z_{AB} = \frac{r + j\omega L + \frac{1}{jC_1 \omega}}{j\frac{C_1}{2}\omega(r + j\omega L + \frac{1}{jC_1 \omega}) + 1}$.

En multipliant en haut et en bas par $jC_1 \omega$, on obtient:

$$Z_{AB}(\omega) = \frac{1 + j r C_1 \omega - L C_1 \omega^2}{j(C_1 + C_2)\omega - r C_2 \omega^2 - j C_1 C_2 L \omega^2}$$

soit

$$Z_{AB}(\omega) = \frac{1}{j(C_1 + C_2)\omega} \frac{1 - L C_1 \omega^2 + j r C_1 \omega}{1 - \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} L \omega^2 + j \frac{C_1 C_2 r}{C_1 + C_2} \omega^2}$$

23) Si $r=0$, on peut poser $C_{eq} = C_1 + C_2$, $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L C_1}}$, et $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}}$, pour obtenir l'écriture

proposée:

$$Z_{AB}(\omega) = \frac{1}{j C_{eq} \omega} \frac{1 - \omega^2 / \omega_1^2}{1 - \omega^2 / \omega_2^2}$$

74) On a $X(\omega) = \frac{-1}{C_0 \omega} \frac{(1 - \omega^2/\omega_1^2)}{(1 - \omega^2/\omega_2^2)}$.

$X(\omega)$ tend vers l'infini comme $\frac{-1}{C_0 \omega}$ quand $\omega \rightarrow 0$

$X(\omega)$ tend vers zéro comme $\frac{-1}{C_0 \omega}$ quand $\omega \rightarrow \infty$.

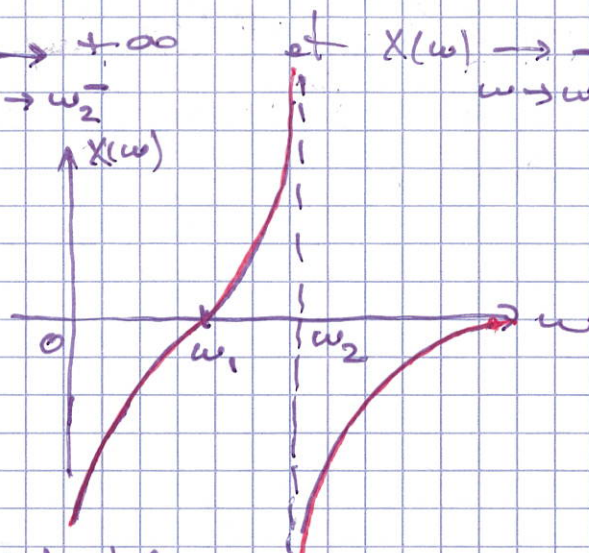
$X(\omega)$ est nul quand $\omega = \omega_1$,

$X(\omega)$ tend vers l'infini quand $\omega \rightarrow \omega_2$.

On voit par ailleurs que $\omega_1 < \omega_2$, puisque $C_1 > \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

Donc $X(\omega) \rightarrow +\infty$ et $X(\omega) \rightarrow -\infty$
 $\omega \rightarrow \omega_2^-$ $\omega \rightarrow \omega_2^+$

D'où le graphe:



75) Le cristal est inductif lorsque $X(\omega) > 0$, c'est-à-dire pour $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

76) A.N.: on trouve $\omega_1 = 5 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$

et donc $\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \approx 7.958 \cdot 10^5 \text{ Hz}$

et $\omega_2 \approx 5.0249 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$

soit $\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \approx 7.997 \cdot 10^5 \text{ Hz}$