

CAPES Blanc n° 1 : épreuve de Physique

Durée : 5 heures

Les conditions générales du concours du CAPES s'appliquent. On prendra soin d'adopter pour chaque question les notations de l'énoncé. Toute grandeur ou abréviation ne figurant pas dans l'énoncé doit être clairement définie. Si au cours de l'épreuve apparaît ce qui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler dans la copie et de poursuivre la composition en indiquant les raisons des initiatives qui auront été prises pour y remédier. L'évaluation tiendra compte des qualités de rédaction de la copie, ainsi que du soin de l'écriture et de la présentation.

L'ensemble de l'épreuve se rapporte à une même expérience décrite en préambule. Toutefois, ses différentes parties sont largement indépendantes (souvent même entièrement), et de nombreuses questions au sein d'une même partie le sont également. Les parties I à V font principalement appel aux connaissances en Mécanique, la partie VI aux connaissances en Optique géométrique, et les parties VII, VIII et IX à celles en Électrocinétique.

Comment atteindre un cible en mouvement

(et gagner le respect éternel de vos étudiants en quelques secondes...)

Ce problème s'inspire d'une expérience relativement simple, mais impressionnante, qui nous a été rapportée par un collègue ayant assisté il y a une trentaine d'années à la démonstration effectuée dans un amphî de première année de Licence de Physique, à Zurich.

L'expérience consiste en un défi que la professeure de Physique s'était lancée à elle-même devant ses étudiants dubitatifs : en projetant une balle depuis un coin de l'amphî, elle parviendrait à heurter une autre balle (la cible) initialement suspendue au plafond au-dessus de son bureau et commençant à tomber en chute libre au moment exact où la balle serait lancée. Elle affirmait de plus être capable de réussir cette prouesse au tout premier essai ! Et bien sûr, elle ne s'appuierait sur aucun pré-réglage de la machine lanceuse de balle. Elle laisserait d'ailleurs toute liberté aux étudiants de positionner eux-mêmes la machine où ils voudraient avant le début de l'expérience, de l'orienter à leur guise, et même de régler la vitesse initiale de projection ! Elle n'aurait alors que quelques instants pour effectuer ses réglages, sans déplacer le lanceur de balle.

Les étudiants n'ont pas manqué de trouver leur professeure bien présomptueuse. Ils savaient que le projectile, dès qu'il aurait été lancé, serait soumis à son poids et suivrait une trajectoire incurvée, dont il faudrait tenir compte. Il faudrait également tenir compte du fait que la vitesse de la balle cible varierait au cours de la chute. Les étudiants voulaient bien admettre que la professeure soit capable d'effectuer le calcul permettant de déterminer la vitesse de lancement et l'angle du tir garantissant, sur le papier, une collision. Mais elle n'aurait pas le temps de le faire, et ne pourrait pas même mesurer la distance exacte entre le lanceur de balle et la cible !

Les discussions – et les paris ! – allaient bon train. Les uns faisaient entière confiance à leur professeure. D'autres pariaient sur un échec, pensant qu'il s'agissait d'un piège pour tester leur crédulité. D'autres encore se disaient : « OK, c'est bon, notre prof était devenue folle ! », et commençaient à ranger leurs affaires pour rentrer chez eux.

Pour ramener le silence, la professeure prononça la phrase magique : « si je rate, vous aurez tous votre Licence ! ». (Cela marche-t-il aussi avec le CAPES ?) Dès lors, tout alla très vite. Les étudiants positionnèrent le lanceur de balle où ils le décidèrent. La professeure effectua rapide-

ment quelques réglages pour l'orienter comme elle estimait devoir le faire. Puis elle déclencha le propulsion, et une fraction de seconde plus tard... l'affaire était pliée! Les étudiants n'auraient peut-être pas tous leur Licence cette année-là, mais la professeure, elle, aurait leur attention pour le reste de l'année!

I – Modélisation et approximations

On dispose de deux balles assimilées à des points matériels de masses respectives m_1 et m_2 . Le corps 1 est la cible, le corps 2 le projectile. Il règne dans l'amphithéâtre un champ de pesanteur supposé uniforme, d'accélération $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. À l'instant $t = 0$, la balle cible est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A, de coordonnées $(x_A = d, y_A = 0, z_A = h_1)$ dans le repère cartésien (xOz) représenté sur la Fig. (1). Au même instant, la balle projectile est lancée depuis le point B, de coordonnées $(x_B = 0, y_B = 0, z_B = h_2)$, avec une vitesse initiale \vec{v}_0 , de norme v_0 et de direction faisant un angle α par rapport à l'horizontale.

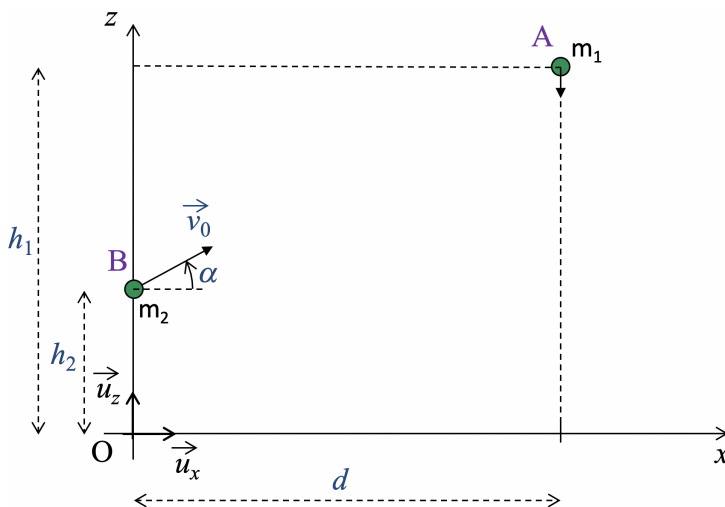


FIG. 1 – Schéma de l'expérience de collision.

1) Reproduire le schéma et tracer l'allure approximative des trajectoires attendues pour les deux corps. Préciser la nature géométrique des trajectoires, en négligeant les forces de frottement entre les balles et l'air, et en supposant que le référentiel terrestre est un référentiel galiléen. NB : aucune démonstration n'est demandée.

Première étude : les frottements

On souhaite tout d'abord s'assurer que le frottement des balles dans l'air est bien négligeable. Pour cela, on compare les mouvements de chute de la balle cible (corps 1) avec ou sans frottements. On considère toujours que le référentiel terrestre est galiléen.

2) Dans le cas où les frottements sont négligés, écrire l'équation du mouvement et en déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}_1(t)$ et de l'altitude du corps, $z_1(t)$, en fonction du temps.

3) En déduire la durée de la chute, T (le plancher se trouvant à l'altitude $z = 0$), ainsi que la norme de la vitesse du corps, v_{sol} , au moment où il touche le sol.

4) A.N. : effectuer l'application numérique, pour $h_1 = 5 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

On cesse à présent de négliger l'action de l'air sur la balle. On rappelle l'expression de la force de frottement d'un corps sphérique de rayon R dans un fluide newtonien (cas de l'air) de viscosité dynamique μ (NB : aucune connaissance relative à la notion de viscosité n'est requise) :

$$\vec{f} = -6\pi\mu R\vec{v},$$

où \vec{v} est la vitesse du corps par rapport au milieu (loi de Stokes). Dans le cas de l'air sec, on donne $\mu \simeq 1.8 \cdot 10^{-5}$ S.I.

On note $z'_1(t)$ et $\vec{v}'_1(t)$ les nouvelles position et vitesse du corps au cours de la chute.

5) Déterminer la dimension physique du paramètre μ défini ci-dessus.

6) Écrire la nouvelle équation du mouvement, tenant compte des frottements, et en déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}'_1(t)$ en fonction du temps. Montrer que la balle atteint asymptotiquement une vitesse limite, \vec{v}_{lim} , avec une échelle de temps $\tau = m_1/(6\pi\mu R_1)$, où R_1 est le rayon de la balle. Donner l'expression de \vec{v}_{lim} .

7) En effectuant un développement limité de l'expression de $v'_1(t)$, écrire au premier ordre non nul en t/τ l'écart de vitesse relatif entre le cas avec frottements et le cas sans frottements :

$$\frac{\delta v}{v}(t) \equiv \frac{v'_1(t) - v_1(t)}{v_1(t)}.$$

8) En déduire que les frottements peuvent être négligés dans ce problème dès lors que $T \ll \tau$ (où T est le temps de chute introduit ci-dessus), et exprimer cette condition sous la forme d'une contrainte sur le rapport m_1/R_1 .

9) A.N. : exprimer cette contrainte sous forme numérique, avec les valeurs déjà données.

10) Montrer que, pour une masse volumique donnée, ρ , cette condition est d'autant mieux vérifiée que le rayon de la balle est grand.

11) Donner une justification physique qualitative de cette propriété.

12) A.N. : proposer des ordres de grandeur raisonnables pour une balle en caoutchouc ainsi que pour une bille en acier, et conclure.

Deuxième étude : la force de Coriolis

On souhaite à présent s'assurer qu'il est acceptable de considérer la Terre comme un référentiel galiléen au cours de l'expérience.

On rappelle l'expression usuelle de la force de Coriolis :

$$\vec{f}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v},$$

où \vec{v} est la vitesse du corps dans le référentiel d'étude.

13) Que représente le vecteur $\vec{\Omega}$ dans l'expression ci-dessus ?

14) Caractériser sa direction et une valeur approchée de sa norme dans le cas du référentiel terrestre, en précisant l'unité utilisée. (NB : on pourra assimiler le jour sidéral au jour solaire.)

15) Justifier le fait que la force de Coriolis conduit à une déviation vers l'est des corps en chute libre, quel que soit le lieu sur la planète. Justifier également que l'effet soit maximal lorsque le corps se trouve à l'équateur. (On pourra s'appuyer sur un dessin.)

16) Estimer la norme de la force de Coriolis maximale, $f_{c,max}$, que le corps peut subir au cours de sa chute d'une hauteur h , en un lieu de latitude λ .

17) En déduire une limite supérieure du décalage vers l'est, δ , d'un corps chutant de la hauteur h_1 à la latitude λ .

18) A.N. : Montrer que dans les conditions de l'expérience, la force de Coriolis peut effectivement être négligée pour la chute du corps 1 (la balle cible).

On admettra sans autre calcul qu'il en va de même pour le corps 2 (la balle projectile), et dans toute la suite on supposera que le référentiel terrestre est galiléen.

II – Conditions de la collision

Dans cette partie, on s'intéresse aux conditions devant être réunies pour que les corps 1 et 2 entrent en collision au cours de leur mouvement. On se limite pour l'instant au cas d'une collision « centre-à-centre », c'est-à-dire d'une collision qui serait obtenue quelle que soit la valeur des rayons propres des deux corps, même s'ils étaient réduits à un point. On s'en tiendra donc à l'étude du mouvement de leur centre (également centre de masse). Les conditions initiales sont celles explicitées au début de la section I. Les paramètres libres, à ajuster pour obtenir la collision, sont la norme de la vitesse de lancement, v_0 , et l'angle d'inclinaison, α .

19) Écrire l'équation du mouvement du corps 2 (la balle projectile), de masse m_2 , dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

20) Compte tenu des conditions initiales, déterminer les coordonnées de ce projectile en fonction du temps.

21) Compte tenu du mouvement de la cible en chute libre, en déduire les conditions d'ajustement des paramètres permettant d'obtenir une collision centre-à-centre. Donner les coordonnées du point de collision, qu'on notera C, ainsi que l'instant t_c où aura lieu cette collision.

22) Quelle propriété particulièrement remarquable peut-on noter au sujet des conditions de collision ?

23) Donner une interprétation géométrique simple de ces conditions, et proposer un protocole par lequel l'enseignante a pu s'assurer aisément du succès de l'expérience. (Devant un amphithéâtre !)

24) Décrire ce qui se passe lorsqu'on fait varier la vitesse de lancement, v_0 , sans rompre les conditions de collision.

III – Explication

Le résultat obtenu dans la partie précédente est tout à fait remarquable, et trouve son origine dans une propriété très profonde de la réalité physique, appelée « principe d'équivalence », comme nous allons l'expliciter dans cette partie. (NB : l'essentiel de cette partie peut se traiter indépendamment des précédentes.)

25) Énoncer le principe d'équivalence, portant sur la notion de masse. (NB : la suite du problème ne dépend pas de la réponse à cette question.)

On reprend l'étude du mouvement et de l'éventuelle collision entre les deux corps, mais en se plaçant cette fois-ci dans le référentiel dit « en chute libre », qu'on notera \mathcal{R}^* , défini comme le référentiel uniformément accéléré avec l'accélération \vec{g} , et ayant à l'instant $t = 0$ une vitesse nulle par rapport au référentiel terrestre.

26) Écrire l'équation du mouvement des corps 1 et 2 (la balle cible et la balle projectile) dans \mathcal{R}^* , en justifiant proprement la réponse.

27) En déduire le mouvement des deux corps dans \mathcal{R}^* .

28) En déduire les conditions, portant sur le lancer du projectile (conditions initiales pour le corps 2), garantissant la collision, et déterminer, lorsqu'elles sont vérifiées, le lieu et l'instant de la collision dans \mathcal{R}^* . Comparer ces conditions à celles obtenues à la partie II.

29) Maintenant que le miracle a été éclairci, résumer la situation et proposer une explication simple de la solution, en quelques lignes.

30) Question bonus : Dans cette question, on tient compte de la taille des balles cible et projectile, de rayons respectifs R_1 et R_2 , et on relâche la condition de collision « centre-à-centre ». Les balles peuvent donc entrer en collision, alors même que ce ne serait pas le cas si leur rayon tendait vers zéro. En raisonnant dans le référentiel \mathcal{R}^* , déterminer les nouvelles conditions, élargies, garantissant la collision entre les deux balles. On les énoncera de manière explicite en fonction des données du problème.

IV – Collision

On suppose dorénavant que les conditions de collision sont satisfaites, et on se penche sur le résultat de la collision elle-même, en supposant qu'elle a lieu « centre-à-centre ». On assimile donc à nouveau les deux balles à des points matériels, de masses respectives m_1 et m_2 .

31) En se plaçant dans le référentiel \mathcal{R}^* défini dans la partie III, déterminer les vitesses des deux corps, \vec{v}_1^* et \vec{v}_2^* , tout juste avant la collision, en fonction de la vitesse initiale \vec{v}_0 .

32) En supposant que le choc est élastique, et “bille en tête”, déterminer les vitesses des deux corps, $\vec{v}_1'^*$ et $\vec{v}_2'^*$, tout juste après la collision.

33) Qu'obtient-on dans le cas où les deux corps sont de même masse ?

34) Déterminer la vitesse du référentiel \mathcal{R}^* par rapport au référentiel terrestre, $\vec{V}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}_T}(t)$ en fonction du temps.

35) En déduire les vitesses des deux corps dans le référentiel terrestre, \vec{v}_1' et \vec{v}_2' , tout juste après la collision. On note t_c l'instant de la collision.

36) Pourquoi pourrait-on avoir l'impression, en faisant l'expérience avec deux balles exactement identiques, qu'en leur point de rencontre elles se traversent l'une l'autre sans se sentir ?

V – Rebond

On s'intéresse à présent au rebond des balles sur le sol, tel qu'il aurait lieu en l'absence de collision, si les balles poursuivaient simplement leur mouvement propre. On tient compte ici du rayon des balles, supposé identique et noté R (i.e. $R_1 = R_2 = R$), et on choisit l'origine de l'axe vertical (coordonnée z) à une hauteur R au-dessus du sol, comme indiqué sur la Fig. 2. Ainsi, la balle i heurte le sol lorsque $z_i = 0$. Les rebonds seront considérés comme quasi instantanés, sans déformation des balles, supposées parfaitement solides, sphériques et homogènes.

On note η le coefficient de frottement solide entre les balles et le sol.

On considère d'abord le rebond de la balle 1 (partie gauche de la Fig. 2).

37) La balle 1 étant lâchée comme précédemment sans vitesse initiale depuis le point A (position de son centre en $z_A = h_1$), déterminer par un raisonnement énergétique sa vitesse, \vec{v} , au moment où elle entre en contact avec le sol (juste avant le rebond).

38) En supposant que le vecteur rotation de la balle est $\vec{\Omega} = \vec{0}$ à l'instant $t = 0$ (instant du lâcher), justifier mathématiquement qu'on a toujours $\vec{\Omega} = \vec{0}$ au moment du rebond. Justifier

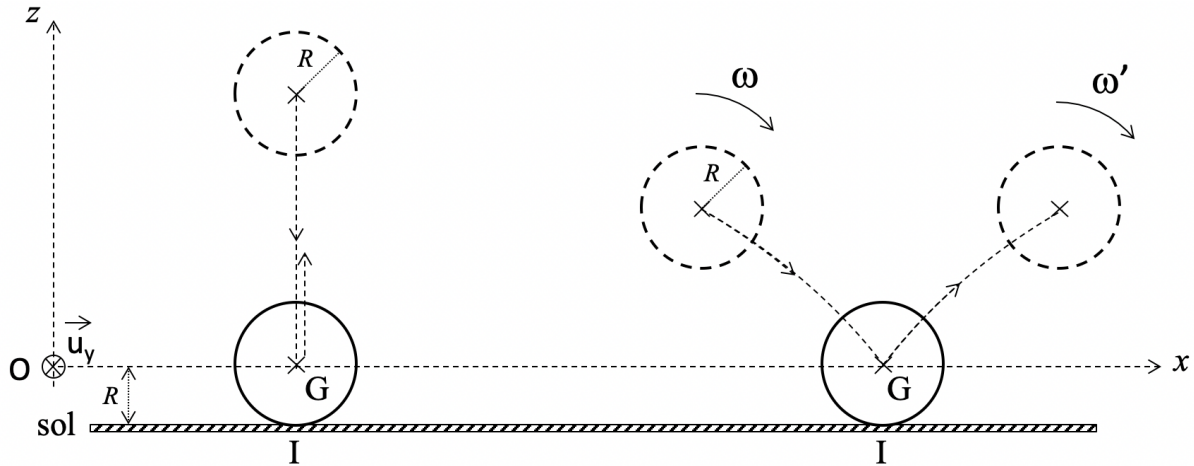


FIG. 2 – Rebond de la balle sur le sol.

que le rebond s'effectue alors suivant la verticale. Indiquer qualitativement, en le justifiant, ce qui se passerait si le vecteur rotation de la balle était $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_y$, dans le cas où $\omega > 0$, puis dans le cas où $\omega < 0$.

39) On suppose que le rebond se fait avec un coefficient d'élasticité (ou coefficient de restitution énergétique) noté ξ . Déterminer la vitesse de la balle, \vec{v}' , juste après le rebond.

40) En déduire le coefficient de restitution en vitesse normale, r , défini comme le rapport des normes des vitesses orthogonales au plan de contact, c'est-à-dire ici $r \equiv |v'_z/v_z|$. (NB : cette question semble inutile et triviale, mais ce coefficient sera réutilisé ultérieurement.)

41) Quelle hauteur maximale la balle atteint-elle après le rebond ?

Notion de « percussion » : au moment du choc, la balle voit sa vitesse, et donc sa quantité de mouvement, changer brutalement. En réalité, un tel changement de quantité de mouvement n'est pas instantané (ce qui impliquerait une force infinie), mais se produit au cours d'un intervalle de temps très court à l'échelle de l'étude, entre l'instant t_0 (début de l'interaction balle-sol) et l'instant $t_0 + \delta t$ (fin de l'interaction). Pendant ce laps de temps, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la balle (théorème du centre d'inertie) s'écrit : $m(d\vec{v}_G/dt) = \vec{f}(t)$, où $\vec{f}(t)$ est la force exercée par le sol sur la balle, qu'on ne cherchera pas à caractériser davantage. En intégrant cette relation sur la durée de l'interaction, on obtient :

$$m\vec{v}' - m\vec{v} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t} \vec{f}(t)dt \equiv \vec{\mathcal{P}},$$

où la grandeur vectorielle $\vec{\mathcal{P}}$ est simplement définie comme l'intégrale de la force exercée. Elle caractérise l'effet dynamique du choc, et est appelée « percussion ».

42) Déterminer la percussion, $\vec{\mathcal{P}}_1$, associée au rebond de la balle 1 ci-dessus.

On s'intéresse à présent au rebond de la balle 2 (partie droite de la Fig. 2), arrivant au sol avec une vitesse dont la composante horizontale n'est pas nulle.

43) Justifier que si la balle parvient au sol avec un vecteur rotation nul (mouvement de translation pure), et s'il n'y a aucun frottement entre la balle et le sol, de sorte que la force de contact soit purement normale à la surface de rebond (sans composante tangentielle), le vecteur rotation sera également nul après le rebond.

44) Expliquer brièvement pourquoi il n'en sera pas de même si la force de frottement est non nulle, et justifier que le vecteur rotation après le rebond soit alors dirigé suivant \vec{u}_y .

Compte tenu de ce qui précède, nous allons à présent étudier le rebond d'une balle arrivant au sol avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_y$, correspondant à une vitesse angulaire ω quelconque. On notera $\vec{\Omega}' = \omega' \vec{u}_y$ son vecteur rotation après le rebond. On note également $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_z \vec{u}_z$ le vecteur vitesse du centre de masse juste avant le rebond, et $\vec{v}' = v'_x \vec{u}_x + v'_z \vec{u}_z$ le vecteur vitesse juste après rebond.

45) En notant J le moment d'inertie de la balle autour d'un axe diamétral ($J = \frac{2}{5}mR^2$), exprimer le moment cinétique de la balle avant le rebond, $\vec{\sigma}_G$, puis après le rebond, $\vec{\sigma}'_G$, en fonction des grandeurs ci-dessus.

Comme précédemment, on représente l'interaction entre la balle et le sol au moyen d'un vecteur percussion, $\vec{P} = \mathcal{P}_x \vec{u}_x + \mathcal{P}_z \vec{u}_z$ (représentant l'intégrale temporelle des forces de contact au cours du choc), appliqué au point de contact entre la balle et le sol, noté I (cf. Fig. 2).

On veut caractériser le mouvement de la balle après le rebond. Pour cela, les inconnues du problème sont les cinq grandeurs physiques suivantes : v'_x , v'_z , ω' , \mathcal{P}_x et \mathcal{P}_z (toutes les autres grandeurs sont en effet des données du problème ou des paramètres supposés connus).

46) Montrer que le théorème du centre d'inertie et le théorème du moment cinétique fournissent trois équations entre ces inconnues.

Pour compléter le système d'équations, on admet que le coefficient de restitution en vitesse normale, $r = |v'_z/v_z|$, est le même que celui obtenu dans le cas du rebond vertical de la première balle, ce qui fournit une quatrième équation. (NB : si son expression n'a pas été trouvée précédemment, continuer en utilisant simplement ce coefficient r , considéré comme un paramètre connu.)

Enfin, pour la cinquième équation requise, on supposera que le coefficient de frottement entre la balle et le sol est suffisant pour garantir qu'il n'y aura pas de glissement au moment du contact.

47) Écrire la condition de non glissement sous forme d'une équation reliant certaines des inconnues du problème (et éventuellement d'autres paramètres).

48) Résoudre le système d'équations afin d'obtenir, d'une part, la vitesse horizontale de la balle après le rebond, v'_x , et d'autre part, la vitesse angulaire après le rebond, ω' . Vérifier que le résultat ne dépend pas du coefficient r .

49) En déduire la vitesse angulaire d'une balle lancée dans les mêmes conditions que la balle projectile de l'expérience initiale, après son premier rebond.

50) Montrer que pour une balle dont la vitesse horizontale avant le rebond est v_x , il existe une vitesse angulaire ω avant le rebond, dont on donnera l'expression, pour laquelle le rebond se fait verticalement.

VI – Étude du viseur

Afin de viser juste, pour accomplir son exploit et obtenir une collision même avec des balles de très petite taille, la professeure utilise un viseur pour orienter convenablement le lanceur de balles, dont l'axe détermine la direction de la vitesse initiale du projectile, en sortie de canon. Dans cette partie, on s'intéresse au fonctionnement optique de ce viseur.

Le viseur utilisé est constitué de deux lentilles minces convergentes, L_1 et L_2 , de distances focales f'_1 et f'_2 , constituant respectivement l'objectif et l'oculaire, centrées sur leur axe commun qui est aussi l'axe du lanceur de balles. Le viseur comporte également un réticule constitué de deux fils fins disposés dans un plan orthogonal à l'axe entre les deux lentilles et se croisant à angle droit au niveau de l'axe, comme représenté schématiquement sur la Fig. 3. L'objectif, le réticule et l'oculaire sont respectivement solidaires de trois cylindres indépendants pouvant coulisser les uns par rapport aux autres le long de leur axe commun, afin d'ajuster la mise au point et le confort d'observation.

Les positions le long de l'axe optique seront repérées par la coordonnée x , dont l'origine est choisie à la position du centre de la première lentille, L_1 , supposée infiniment mince.

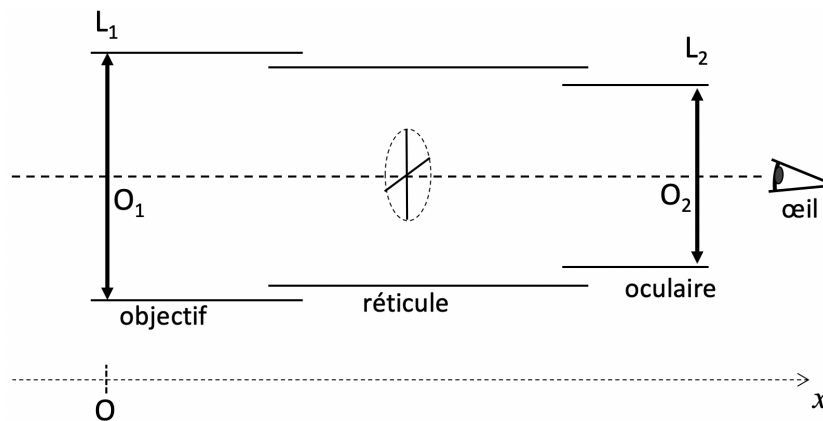


FIG. 3 – Schéma optique du viseur.

On s'intéresse tout d'abord à l'oculaire.

51) Afin d'ajuster son confort de vision, l'utilisateur commence par régler la distance entre le réticule et la lentille L_2 , afin d'observer le réticule de manière nette sans accommodation. Où l'image du réticule par l'oculaire doit-elle alors se former, dans l'hypothèse d'une vision conforme à la vision de référence (œil sain, ni myope, ni hypermétrope) ?

52) À quelle distance le réticule doit-il se trouver pour cela, par rapport au centre de la lentille L_2 supposée infiniment mince ? Cette distance étant adoptée, on ne la modifiera plus par la suite.

53) Dans le cas de l'observation d'un objet situé à très grande distance (quasi infinie) dans l'axe du viseur, à quel endroit convient-il de placer la lentille L_1 par rapport aux autres éléments pour que l'objet visé apparaisse net et centré sur le réticule ?

54) Pourquoi dit-on que, dans ces conditions, le viseur constitue un système optique afocal ?

55) Rappeler les conditions de Gauss pour l'utilisation des systèmes optiques centrés. On supposera par la suite que ces conditions sont vérifiées.

56) Faire un schéma soigné représentant l'évolution, à travers les lentilles, d'un faisceau parallèle provenant de l'infini selon une direction faisant un angle θ par rapport à l'axe optique.

57) Définir le grossissement angulaire de l'instrument et donner son expression, G_∞ , pour un objet à l'infini, en fonction des données du problème. On démontrera le résultat en s'appuyant par exemple sur le schéma précédent.

58) A.N. : On donne $f'_1 = 20$ cm et $f'_2 = 5$ cm. Calculer le grossissement du viseur pour un objet situé à l'infini.

On s'intéresse à présent au cas où l'instrument vise un objet à distance finie, en l'occurrence la balle de rayon R utilisée dans l'expérience, située à la distance D . On ne supposera pas *a priori* que cette distance est grande devant les distances focales des lentilles.

59) Rappeler la relation de conjugaison pour une lentille convergente, et en déduire la position de l'image de l'objet formée par l'objectif (lentille L_1 seule).

60) En partant du réglage antérieur (pour un objet à l'infini), de quelle distance Δx faut-il reculer le système réticule-oculaire pour que l'œil puisse observer l'objet net, sans accommodation, en coïncidence avec le réticule.

61) Déterminer le rayon R' de l'image intermédiaire mentionnée ci-dessus (celle donnée de l'objet par l'objectif seul).

62) En déduire l'angle sous laquelle elle est vue à travers l'oculaire, ainsi que le grossissement correspondant, $G(D)$. Exprimer enfin le rapport entre les deux grossissements : $\rho \equiv G(D)/G_\infty$.

63) A.N. : Calculer le recul de mise au point, Δx , dans le cas où $D = 10$ m, ainsi que le rapport entre les deux grossissements, ρ .

VII – Déclenchement automatique

Dans l'étude des conditions de collision entre les deux corps, nous avons supposé que les deux mouvements débutaient exactement au même instant, à $t = 0$. Afin de réussir l'expérience de collision, il est donc essentiel que la chute libre de la balle cible et le lancement de la balle projectile soient synchronisés avec précision – une précision devant être d'autant plus grande que les rayons des balles sont petits et les vitesses prévues au moment de l'impact élevées.

Une possibilité, pour synchroniser les mouvements, consiste à détecter le passage du projectile à l'extrémité du canon, et d'envoyer alors une impulsion électrique permettant d'activer à distance un relais qui libérera la balle cible.

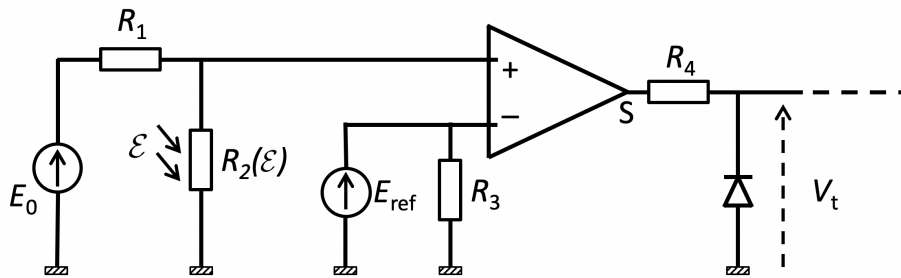


FIG. 4 – Montage comparateur avec photo-résistance.

Pour cela, on se propose d'utiliser une photo-résistance (voir ci-dessous), ainsi qu'un amplificateur opérationnel en montage de type comparateur de tension, selon le schéma représenté sur la Fig. 4. L'amplificateur est supposé idéal : son impédance d'entrée est infinie (aucun courant entrant par les voies + et -), et son gain est tel que si le potentiel de la borne d'entrée "+", V_+ , est supérieur à celui de la borne d'entrée "-", V_- , alors le potentiel de sortie est saturé à la valeur $V_S = +V_{\text{sat}} = 15$ V, tandis que si $V_+ < V_-$, alors $V_S = -V_{\text{sat}} = -15$ V.

Sur le schéma, la diode représentée à droite de l'ampli-op' est supposée parfaite, c'est-à-dire qu'elle se comporte comme un simple fil (résistance nulle) en mode passant, et comme un interrupteur ouvert en mode bloqué. Les générateurs de tension E_0 et E_{ref} sont de résistance interne négligeable. On a $E_0 = 12 \text{ V}$ et $E_{\text{ref}} = 6 \text{ V}$. Les valeurs des résistances R_1 , R_3 et R_4 ne sont pas précisées, mais font partie des données du problème.

Une photo-résistance est un composant dont la résistance électrique varie en fonction de l'intensité lumineuse qu'il reçoit. Dans le domaine d'éclairement considéré, sa résistance, R_2 , varie approximativement selon la loi suivante : $R_2(\mathcal{E}) = k/\mathcal{E}$, où \mathcal{E} est l'éclairement de la photo-résistance (exprimé en lux ou cd sr m^{-2}), et $k = 100 \text{ k}\Omega \text{ lux}$. La photo-résistance est incrustée à l'intérieur du canon de lancement, au niveau de sa sortie, et est éclairée par une petite LED incrustée au même niveau, mais diamétralement opposée, de façon à ce que l'éclairement initial de la photo-résistance, \mathcal{E}_0 , soit supérieur à $\mathcal{E}_{\text{haut}} = 10 \text{ lux}$. Lorsque le projectile s'interpose entre la LED et la photo-résistance, en sortant du canon, l'éclairement décroît jusqu'à une valeur inférieure à $\mathcal{E}_{\text{bas}} = 0.1 \text{ lux}$.

64) Exprimer le potentiel V_+ sur la borne d'entrée "+" en fonction de l'éclairement \mathcal{E} de la photo-résistance et des données du problème.

65) En déduire la valeur du potentiel de sortie de l'ampli-op', V_S , en fonction de \mathcal{E} et des données du problème. Tracer la courbe correspondante.

66) En déduire la valeur de la tension transmise en sortie de montage, V_t (cf. Fig. 4), en fonction de \mathcal{E} et des données du problème. Tracer la courbe correspondante.

67) Dans quel intervalle de valeurs faut-il choisir la résistance R_1 pour que le projectile, en sortant du canon, entraîne l'émission d'une impulsion électrique en sortie de montage.

VIII – Propagation du signal

On s'intéresse à présent à la transmission de l'impulsion électrique le long d'un câble coaxial supposé sans pertes, dont un schéma électrique équivalent simplifié est donné sur la Fig. 5. Le schéma représente une longueur infinitésimale dx le long du câble, entre l'abscisse x et l'abscisse $x + dx$, dont l'inductance par unité de longueur est notée λ et dont la capacité par unité de longueur est notée γ . Les tensions à l'entrée et à la sortie de l'élément de câble sont notées $V(x, t)$ et $V(x + dx, t)$. Les courants correspondants sont $I(x, t)$ et $I(x + dx, t)$.

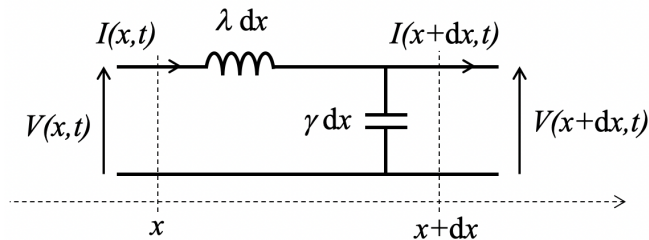


FIG. 5 – Schéma électrique équivalent d'une portion de câble coaxial sans pertes.

68) Exprimer la tension aux bornes de la bobine, ainsi que la tension aux bornes du condensateur, en fonction de sa charge, en indiquant clairement sur un schéma les conventions utilisées.

69) En appliquant par exemple la loi des mailles et la loi des nœuds, relier les différentes grandeurs sous forme d'un système d'équations différentielles couplées du premier ordre, puis de deux équations différentielles du deuxième ordre découplées, l'une portant sur $V(x, t)$, et l'autre sur $I(x, t)$.

70) Montrer qu'elles peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

et exprimer la grandeur c en fonction des données du problème.

71) A.N. : On reconnaît ci-dessus l'équation d'onde de D'Alembert, où c est la célérité des ondes dans le câble. Calculer cette vitesse dans le cas d'un câble pour lequel $\lambda = 0.25 \mu\text{H/m}$ et $\gamma = 100 \text{ pF/m}$.

IX – Oscillateur à quartz

Plutôt que de déclencher la chute de la balle cible par la transmission d'un signal associé au lancement du projectile, une autre possibilité pour synchroniser les mouvements consiste à déclencher de manière indépendante, à partir d'une même base de temps locale. Des horloges à quartz, préalablement synchronisées, permettent d'obtenir une base de temps suffisamment stable pour cela.

Un cristal de quartz possède des propriétés piézoélectriques, c'est-à-dire que l'application d'une contrainte mécanique (compression ou extension) provoque la séparation des charges électriques, et donc l'apparition d'une différence de potentiel en son sein. Inversement, l'application d'une tension électrique sur le cristal induit une déformation élastique, qui peut conduire à une résonance dans le cas d'une excitation par une tension périodique correspondant à une fréquence propre du cristal. En retour, lorsqu'il est inséré dans une boucle de rétroaction d'un circuit électrique actif, il peut donner lieu à des oscillations spontanées de fréquence très précise et très stable. C'est le principe des oscillateurs à quartz, très largement utilisés dans de nombreux domaines.

Nous nous contenterons ici d'une étude très sommaire.

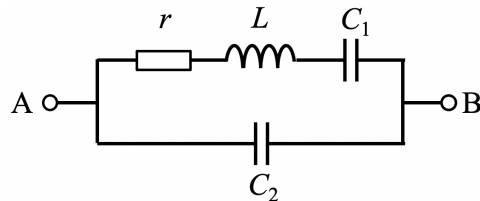


FIG. 6 – Schéma électrique équivalent d'un cristal de quartz.

72) Dans l'hypothèse d'un régime sinusoïdal de pulsation ω , calculer l'impédance complexe équivalente, $Z_{AB}(\omega)$, du cristal de quartz dont la modélisation électrique est représentée sur la Fig. 6.

73) Montrer que, dans le cas où la résistance est négligeable ($r = 0$), cette impédance peut s'écrire sous la forme :

$$Z_{AB}(\omega) = \frac{1}{jC_{\text{eq}}\omega} \times \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}},$$

où l'on exprimera C_{eq} , ω_1 et ω_2 en fonction de L , C_1 et C_2 .

74) La partie imaginaire de l'impédance complexe est appelée « réactance », et notée X . Représenter l'allure de la courbe $X(\omega)$.

75) Dans quel(s) domaine(s) de fréquence le cristal de quartz a-t-il un comportement inductif (réactance positive). NB : c'est dans ce mode que le cristal est utilisé au sein d'un oscillateur.

76) A.N. : calculer les limites de ce domaine pour $L = 500 \text{ mH}$, $C_1 = 0.08 \text{ pF}$, et $C_2 = 8 \text{ pF}$.