
Master MEEF – 2017-2018

CAPES Blanc n° 1

Détection (imaginaire) d'un astéroïde géocroiseur par un télescope infrarouge et opération d'évitement.

Samedi 18 novembre 2018 – Durée: 5 heures

L'épreuve comprend cinq parties indépendantes, et de nombreuses questions et sous-parties le sont également.

Les conditions générales du concours du CAPES s'appliquent.

- On prendra soin d'adopter pour chaque question les notations de l'énoncé. Toute grandeur ou abréviation ne figurant pas dans l'énoncé doit être clairement définie.
- Si au cours de l'épreuve apparaît ce qui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler dans sa copie et de poursuivre la composition en indiquant les raisons des initiatives qu'on aura été amené à prendre.
- L'évaluation tiendra compte des qualités de rédaction de la copie.

PARTIE A - Détection d'un astéroïde au moyen d'un télescope infrarouge¹

I - Généralités préliminaires

1) À quel intervalle de longueurs d'onde correspond le domaine des rayonnements infrarouges, de l'infrarouge "proche" à l'infrarouge "lointain".

2) Justifier qualitativement l'émission de lumière par un corps à l'équilibre thermodynamique, dite "rayonnement de corps noir".

3) On rappelle la loi de Wien donnant la longueur d'onde, λ_{\max} , à laquelle l'émission lumineuse d'un corps noir de température T est maximale: $\lambda_{\max} T = A$, où $A \simeq 2.9 \cdot 10^{-3} \text{ K m}$. Justifier qualitativement la forme de cette loi et l'ordre de grandeur de la constante A .

4) Pourquoi est-il indispensable de refroidir un télescope visant à détecter les rayonnements infrarouges du cosmos, qu'il opère depuis le sol ou même depuis l'espace, à quelques dizaines de kelvins? (Justifier quantitativement la réponse.)

II - Fonctionnement et alimentation d'un bolomètre

Dans cette partie, on s'intéresse à des bolomètres. Ces dispositifs permettent de détecter les rayonnements infrarouges en mesurant la variation de la résistance d'un matériau lors de son échauffement consécutif à l'absorption de rayonnement électromagnétique. La Fig. 1 présente le schéma de principe d'un bolomètre.

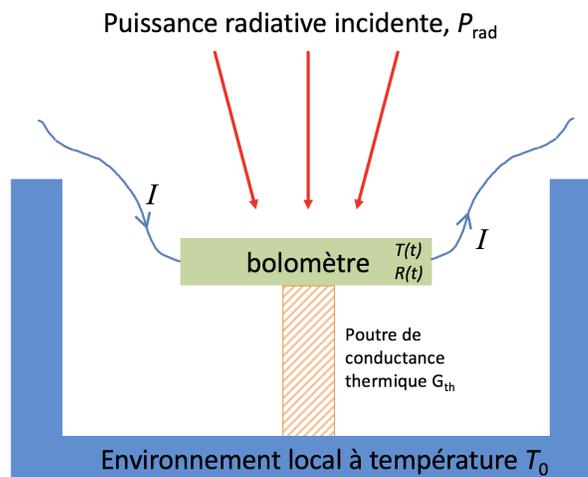


Figure 1: Schéma de principe d'un bolomètre

Le bolomètre, représenté en vert au centre de la figure, absorbe le flux électromagnétique incident, de puissance P_{rad} . Il a une capacité thermique (ou capacité calorifique) C_{th} , et possède par ailleurs une résistance électrique $R(T)$, qui dépend de sa température T , et est parcouru par un courant d'intensité I . On mesure alors les variations de la tension U à ses bornes lorsque la résistance R varie.

Le bolomètre est relié mécaniquement et thermiquement à une "source froide" (son environnement local) maintenue à la température T_0 par une poutre de conductance thermique totale faible, notée G_{th} .

¹adapté du sujet de concours Centrale-Supélec MP 2014.

La loi de variation de la résistance électrique R du bolomètre en fonction de la température peut être considérée comme linéaire:

$$R(T) = R_0 + \alpha R_0(T - T_0),$$

où α et R_0 sont des constantes caractéristiques du matériau.

5) Compte tenu du fonctionnement décrit ci-dessus, pourquoi est-il crucial que la résistance du bolomètre soit alimentée avec un courant invariable?

6) On propose le montage d'alimentation représenté sur la Fig. 2, où le générateur de tension délivre une tension continue $e = 5 \text{ V}$ et où l'amplificateur opérationnel est considéré comme idéal, de tensions de saturation $V_{\text{sat},\pm} \pm 15 \text{ V}$. Calculer l'intensité du courant, i , à travers la charge de résistance R_c en fonction des données du problème (R_1, R_2, R_3, R_4, e et R_c), en supposant un mode de fonctionnement linéaire pour l'amplificateur opérationnel. [*Rappel: pour éviter de tourner en rond, obtenez d'abord un système algébrique comportant autant d'équations que d'inconnues, puis résolvez-le méthodiquement.*]

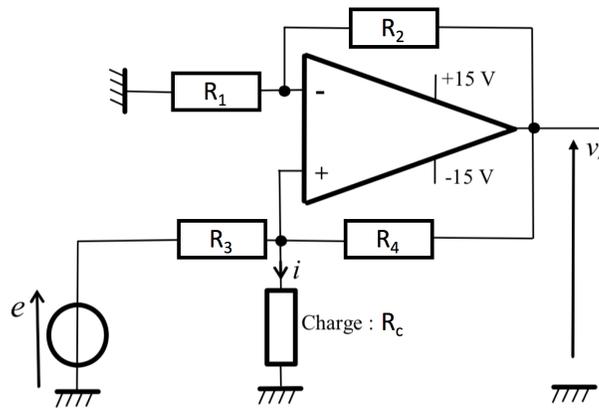


Figure 2: Montage d'alimentation

7) Quelle relation doit-il exister entre les résistances R_1, R_2, R_3 et R_4 pour que ce dispositif convienne à l'alimentation du bolomètre, qui en constituerait alors la charge?

8) Donner alors une expression du courant i dans la charge.

9) En déduire l'expression de la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel, v_s .

10) Si $R_1 = R_2$ et $R_3 = R_0$ (i.e. la résistance du bolomètre à la température T_0), montrer que le fonctionnement de l'amplificateur opérationnel peut effectivement être linéaire pour un bolomètre ne s'éloignant pas trop de la température de son environnement, T_0 .

III - Bilan thermique et temps de réponse du bolomètre

11) Exprimer la puissance thermique transférée entre le bolomètre et son environnement (la "source froide"), en fonction de la conductance thermique de la poutre qui les relie et de leur différence de température. (Bien préciser la convention choisie pour le sens de l'échange.)

12) Le passage d'un courant I dans la résistance R du bolomètre entraîne une production de chaleur. Le nom de quel physicien est-il attaché à cet effet? Quelle fut sa période d'activité? Donner l'expression de la puissance correspondante.

13) Le bolomètre de capacité thermique C_{th} étant en outre exposé au flux lumineux mentionné plus haut, de puissance P_{rad} , établir son bilan thermique complet et montrer que sa

température T obéit à une équation différentielle de la forme:

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = \beta(P_{\text{rad}}),$$

où l'on donnera l'expression de la constante τ et de la fonction $\beta(P_{\text{rad}})$.

14) Montrer que si le coefficient α est négatif, la stabilité du fonctionnement du dispositif est garantie.

15) Déterminer la température $T_p(P_{\text{rad}})$ du bolomètre qui reçoit un flux P_{rad} en régime permanent.

On s'intéresse dans un premier temps au temps de réponse du bolomètre. Pour cela, le système étant en équilibre thermique sous un flux électromagnétique incident de puissance P_{rad} , on supprime brutalement ce flux incident à l'instant $t = 0$.

16) Tracer l'allure de l'évolution de la température en fonction du temps: $T(t)$. On fera apparaître en particulier le paramètre τ .

17) Expliquer qualitativement l'influence de la capacité thermique, C_{th} , et de la conductance thermique, G_{th} , sur le temps de réponse du bolomètre.

IV - Sensibilité du bolomètre: réponse en régime forcé

On souhaite enfin déterminer l'expression de la sensibilité S de l'instrument. Il s'agit de son aptitude à convertir une variation du flux incident en une variation de la tension électrique V . On considère pour cela un flux incident tel que $P_{\text{rad}}(t) = P_{\text{rad},0} + P_0 \cos(\omega t)$, et on s'intéresse à la variation de température par rapport à la température d'équilibre T_1 , notée $\Theta(t) = T(t) - T_1$.

18) L'“excitation” du système, $P_{\text{rad}}(t)$, étant sinusoïdale, on s'attend à une “réponse” également sinusoïdale, à la même pulsation ω . Il est alors possible de passer en représentation complexe et d'introduire la grandeur $\underline{\Theta}(t) = \underline{\Theta}_0 \exp(i\omega t)$, dont la grandeur physique $\Theta(t)$ est la partie réelle: $\Theta(t) = \Re(\underline{\Theta}(t))$.

19) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\Theta}(t)$.

20) Montrer que dans ce régime forcé, l'amplitude $\Theta_0 = |\underline{\Theta}(t)|$ des variations de température du bolomètre, en réponse au flux incident $P_{\text{rad}}(t)$ ci-dessus, peut se mettre sous la forme:

$$\Theta_0(\omega) = \frac{A}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}, \quad \text{avec} \quad A = \frac{P_0}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2}.$$

21) Déterminer, en régime forcé, l'expression de l'amplitude U_0 des variations de la tension $U(t)$ aux bornes de la résistance R .

22) En déduire l'expression de la sensibilité $S(\omega) = U_0/P_0$.

23) Déterminer les comportements asymptotiques de la sensibilité $S(\omega)$, en précisant leurs domaines de validité.

24) Tracer l'allure de la courbe $S_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log S$ en fonction de $\log(\omega/\omega_0)$, où ω_0 est une pulsation de référence à choisir à sa guise, mais à préciser.

25) Préciser la nature du filtre constitué par ce détecteur, et donner l'expression de la ou des pulsations de coupure.

26) Justifier qualitativement la chute de la sensibilité en dehors de la bande passante ?

27) Dans quel sens faut-il faire varier la conductance thermique G_{th} entre le bolomètre et son environnement pour augmenter la sensibilité dans la bande passante ? Quelle en est la conséquence sur la rapidité de la réponse du bolomètre ?

PARTIE B - Observation d'un astéroïde à l'aide d'un télescope de type Cassegrain²

1) Définir le stigmatisme et l'aplanétisme d'un système optique centré utilisé dans les conditions de Gauss.

On considère un miroir sphérique concave de centre C et de sommet S. Un objet AB assimilable à un segment est placé perpendiculairement à l'axe optique, l'extrémité A étant sur l'axe, comme indiqué sur la Fig. 3 en annexe.

2) Construire, dans le cadre de l'approximation de Gauss, l'image A'B' de AB par le miroir principal, sur la Fig. 3 donnée en annexe. *Indication: Effectuer la construction à l'aide de deux rayons émis par B, l'un passant par C, l'autre par S, en justifiant la trajectoire de chacun.* [N'oubliez pas de rendre la feuille correspondante avec votre copie !]

3) Établir à l'aide de cette construction la formule de conjugaison suivante, avec origine au sommet:

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}.$$

4) En déduire l'existence d'un foyer objet F et d'un foyer image F' et préciser leurs positions relatives par rapport à S et C.

On considère à présent le télescope de Cassegrain constitué de deux miroirs sphériques M₁ et M₂. Le miroir M₁ est concave avec une ouverture à son sommet S₁. M₂ est convexe, et sa face réfléchissante est tournée vers celle de M₁. On observe à travers ce télescope un objet AB dont l'extrémité A est située sur l'axe optique. L'objet étant très éloigné les rayons issus de B qui atteignent le miroir M₁ sont quasiment parallèles et forment avec l'axe optique l'angle α . Après réflexion sur M₁, ces rayons se réfléchissent sur M₂ et forment une image finale A'B' située au voisinage de S₁.

5) Effectuer les constructions géométriques des images intermédiaires A₁B₁ de AB par M₁ et finale A'B', sur la Fig. 4 donnée en annexe.

On désigne par f_1 et f_2 les distances focales, comptées positivement, des deux miroirs M₁ et M₂ ($f_1 = \overline{F_1S_1}$, $f_2 = \overline{F_2S_2}$), et par $D = \overline{S_2S_1}$ la distance séparant les deux miroirs.

6) Exprimer D en fonction de f_1 et f_2 pour que l'image finale A'B' soit située dans le plan de S₁. Simplifier cette expression lorsque $f_1 \gg f_2$.

7) Déterminer dans ces conditions, et toujours dans l'hypothèse $f_1 \gg f_2$, la taille de l'image intermédiaire A₁B₁, en fonction de α et f_1 . En déduire celle de l'image finale A'B' en fonction de α , f_1 et f_2 .

8) Application numérique: calculer A'B' pour $\alpha = 10^{-3}$ rad, $f_1 = 40$ cm et $f_1/f_2 = 20$.

²adapté d'un sujet de concours commun (Mines AADN 2005).

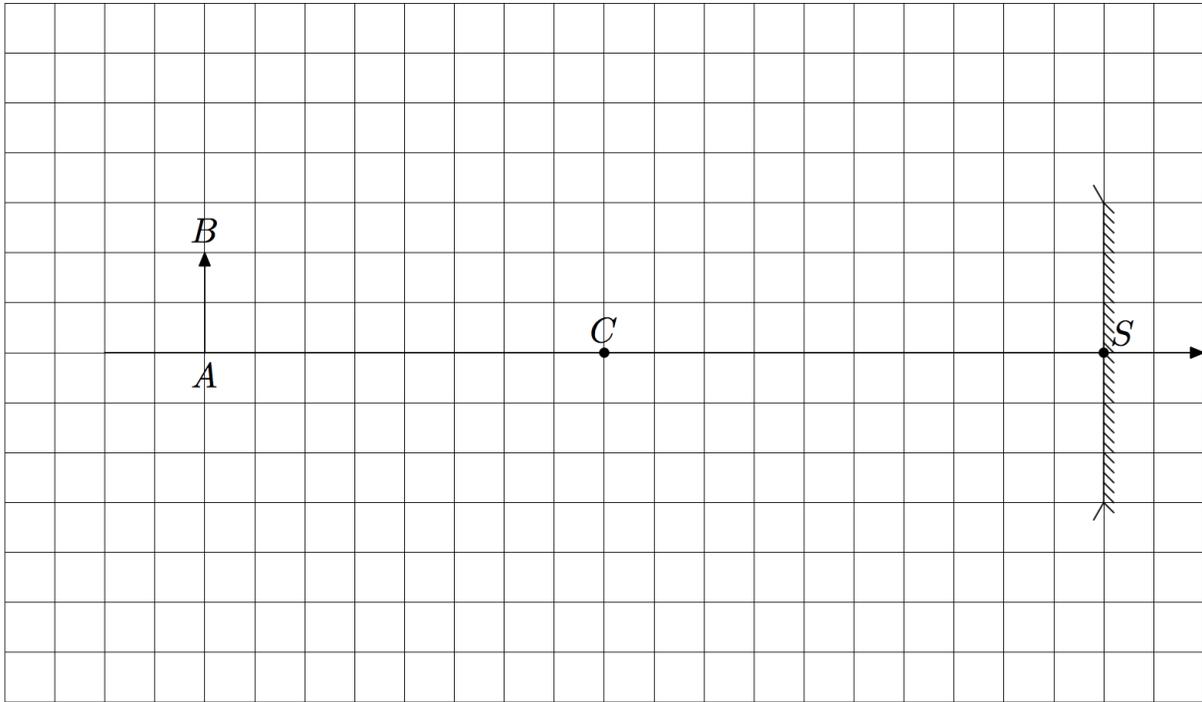


Figure 3: Miroir sphérique

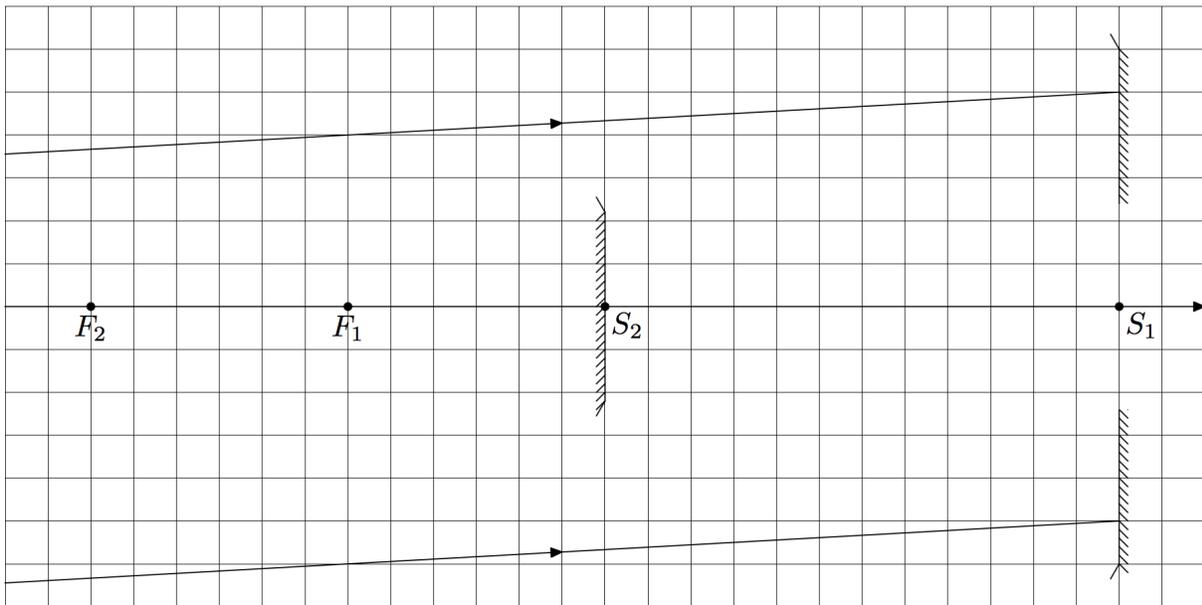


Figure 4: Télescope de Cassegrain

PARTIE C - Trajectoire de l'astéroïde repéré par le télescope.

I - L'astéroïde est-il géocroiseur?

Dans cette partie, nous considérons un astéroïde A, quasi sphérique, de masse m_A et de rayon R_A , soumis à la seule attraction du Soleil, en négligeant l'action exercée par tous les autres corps. On se place dans le référentiel héliocentrique, \mathcal{R}_\odot , supposé galiléen. Ce référentiel, dans lequel le Soleil est au repos, est muni d'un repère polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ ayant son origine au centre du Soleil. On repère la position de l'astéroïde par le vecteur $\vec{r} = r \vec{u}_r$. La masse du Soleil vaut $M_\odot \simeq 2 \cdot 10^{30}$ kg, et la constante de gravitation universelle de Newton vaut $G \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$.

- 1) Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par le Soleil sur l'astéroïde.
- 2) Justifier que le mouvement de l'astéroïde s'effectue dans un plan.

Grâce à diverses observations dans l'infrarouge, les astronomes ont repéré l'astéroïde et sont parvenus à déterminer sa position et sa vitesse à un instant donné, t_0 , dans le référentiel \mathcal{R}_\odot . On note $\vec{r}_0 = r_0 \vec{u}_r$ cette position, et $\vec{v}_0 = v_{r,0} \vec{u}_r + v_{\theta,0} \vec{u}_\theta$ la vitesse correspondante, où l'angle θ est repéré dans le plan de la trajectoire par rapport à une direction donnée, prise comme référence.

3) Relier les dérivées temporelles du rayon, $\dot{r}(t)$, et de l'angle polaire, $\dot{\theta}(t)$, de l'astéroïde autour du Soleil, aux composantes, $v_r(t)$ et $v_\theta(t)$, de la vitesse dans le repère polaire.

4) Donner l'expression de l'énergie potentielle associée à la force de gravitation exercée par le Soleil sur l'astéroïde, et tracer son graphe (par convention, on supposera que cette énergie potentielle est nulle à l'infini).

5) Exprimer l'énergie mécanique, E_m , de l'astéroïde, en fonction des grandeurs précédemment introduites.

6) Cette énergie mécanique varie-t-elle au cours du mouvement. Si oui: comment? Si non: pourquoi?

7) Application numérique: calculer la masse m_A , sachant que son rayon vaut $R_A = 100$ m et que sa masse volumique moyenne vaut $\rho = \frac{3}{4\pi} 10^4 \text{ kg m}^{-3}$.

8) Calculer numériquement l'énergie mécanique, E_0 , de l'astéroïde à l'instant t_0 , sachant que $r_0 = 2 \cdot 10^8$ km, $v_{r,0} = 5$ km/s et $v_{\theta,0} = 20$ km/s.

9) En déduire la nature de la trajectoire, en justifiant la réponse.

10) Si un corps de même masse, m_A , et d'énergie mécanique E_0 avait une orbite circulaire, quelle serait son rayon, r_c ? Déterminer d'abord son expression littérale en fonction de m_A , E_0 , M_\odot et G , puis effectuer l'application numérique.

11) Donner l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}$ de l'astéroïde par rapport au point S, centre du Soleil.

12) Ce moment cinétique varie-t-il au cours du mouvement. Si non: pourquoi? Si oui: comment?

13) Calculer numériquement sa norme, σ_0 , à l'instant t_0 .

14) Exprimer à nouveau l'énergie mécanique, E_m , de l'astéroïde dans le référentiel \mathcal{R}_\odot , en faisant intervenir σ_0 , et la vitesse radiale, v_r .

15) En déduire l'expression d'une équation du second degré en r permettant de déterminer le périhélie, r_{\min} , et l'aphélie, r_{\max} , de l'orbite de l'astéroïde autour du Soleil (i.e. respectivement les positions la plus proche et la plus éloignée du Soleil). Montrer que cette équation peut se

mettre sous la forme:

$$r^2 - 2r_c r + R^2 = 0, \quad \text{avec} \quad R = \frac{\sigma_0}{\sqrt{-2mE_0}}.$$

16) En déduire l'expression de r_{\min} et r_{\max} en fonction de r_c et R .

17) L'orbite de l'astéroïde est-elle susceptible de croiser celle de la Terre, quasi circulaire à une distance $D_T = 1.5 \cdot 10^8$ km du Soleil?

II - Par Toutatis, le ciel nous tombera-t-il sur la tête ?

Dans cette partie, on considère le système constitué par l'astéroïde, de centre A, et la Terre, de centre T, en faisant abstraction de tout autre corps céleste et en négligeant en particulier l'attraction exercée par le Soleil. La situation considérée est alors celle de la figure 5, représentée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. La masse de la Terre, $M_T \simeq 6 \cdot 10^{24}$ kg étant très supérieure à celle de l'astéroïde, on pourra négliger ici l'action que ce dernier exerce sur elle.

À l'instant "initial", t_0 , l'astéroïde A se trouve à très grande distance de la Terre, de sorte que l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle astéroïde-Terre est négligeable. Il est animé d'une vitesse relative \vec{v}_0 (par rapport à la Terre) dirigée le long d'un axe Δ passant à une distance b du centre de la Terre, T (appelée *paramètre d'impact*). Le système astéroïde-Terre évolue alors librement, sous l'action de la seule force de gravitation newtonienne.

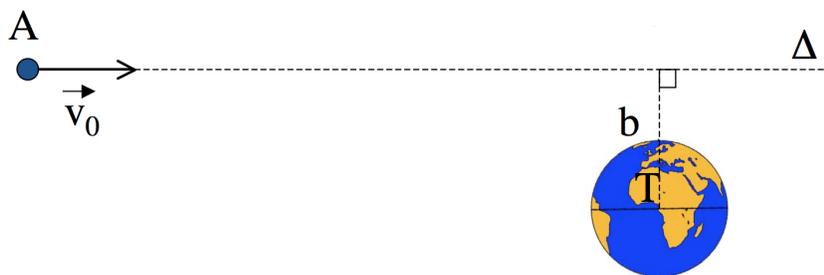


Figure 5: Configuration initiale: l'astéroïde est en mouvement quasi rectiligne uniforme, à très grande distance de la Terre, elle-même initialement immobile (cf. texte).

18) Quelles sont les quantités conservées au cours du mouvement ? Justifier la réponse.

19) Soit H le point de la trajectoire de l'astéroïde où sa distance à la Terre est minimale. Représenter schématiquement cette trajectoire en indiquant la position du point H et justifier que les deux vecteurs \vec{r}_H et \vec{v}_H (position repérée par rapport au centre de la Terre et vitesse associée) soient orthogonaux.

20) En exploitant les lois de conservation, déterminer la distance minimale d'approche, r_H , en fonction des données du problème.

21) Application numérique: si $v_0 = 5$ km/s et $b = 10\,000$ km, l'astéroïde de rayon $R_A \ll R_T$ percutera-t-il la Terre? On rappelle le rayon de la Terre: $R_T \simeq 6\,380$ km.

22) En gardant la vitesse initiale $v_0 = 5$ km/s, quelle est la valeur du paramètre d'impact minimal, b_{\min} , garantissant que la Terre soit épargnée?

III - Éloigner la menace

Afin de défléchir la trajectoire d'un astéroïde menaçant la Terre, on envisage d'envoyer une sonde à sa rencontre, et de le percuter. NB: dans cette partie on ne considère que le système astéroïde/sonde, en faisant abstraction de tout autre corps céleste.

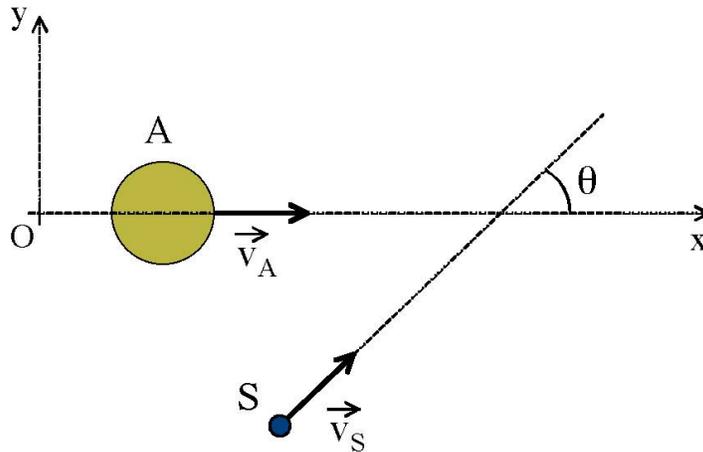


Figure 6: Schéma représentant les trajectoires de la sonde et de l'astéroïde avant le choc, dans le référentiel héliocentrique.

La Fig. 6 représente la situation envisagée dans le référentiel héliocentrique, \mathcal{R}_\odot . (Le point O, origine du repère représenté, n'est toutefois pas ici le centre du Soleil.) On réalise un choc "parfaitement mou", à l'issue duquel nous supposons qu'il n'y a plus qu'un corps solide, la sonde étant "encastrée" dans l'astéroïde. La sonde, de masse $m_S = 20$ tonnes, possède avant le choc une vitesse de norme $v_S = 14.1$ km/s mesurée dans \mathcal{R}_\odot , tandis que l'astéroïde, de masse $m_A = 10^{10}$ kg, est animé dans ce même référentiel d'une vitesse $v_A = 20$ km/s, dirigée le long de l'axe Ox . L'angle entre les directions des deux corps vaut $\theta = 45^\circ$, comme indiqué sur la figure ci-dessous, où A désigne l'astéroïde et S la sonde.

23) Déterminer le vecteur vitesse de l'astéroïde après la collision, en négligeant l'interaction gravitationnelle entre les deux corps. On ne demande pas d'application numérique pour ses composantes.

24) Exprimer la tangente de l'angle φ entre l'axe Ox et la trajectoire de l'astéroïde après la collision. Donner le résultat au premier ordre en m_S/m_A , considéré comme très petit (c'est bien le cas, en effet !).

25) Au bout de quelle distance, D , l'astéroïde se sera-t-il décalé de $\Delta b = 5\,000$ km perpendiculairement à sa trajectoire initiale? Effectuer l'application numérique.

26) Quel(s) inconvénient(s) présente selon vous une telle méthode?

27) Une autre méthode envisagée consiste à poser la sonde sur l'astéroïde, à s'arrimer, et à le propulser à partir de cette position. Quels avantages pourraient présenter une telle méthode? Et quel(s) inconvénient(s)?

28) Quelle autre méthode pourriez-vous suggérer?

PARTIE D - Manipulation du télescope par vérin hydraulique.

Pour assurer un bon pointage, les télescopes doivent être manœuvrés rapidement et avec précision, en dépit de leur masse parfois très importante. On s'intéresse ici au fonctionnement simplifié d'un vérin hydraulique permettant d'exercer des efforts sur des pièces mécaniques, par l'action d'un liquide sous pression.

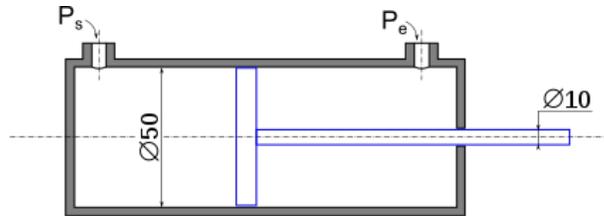


Figure 7: Schéma de principe d'un vérin hydraulique

La Fig. 7 représente un vérin à double effet composé d'un piston relié à une tige, séparant deux chambres susceptibles de recevoir un liquide (supposé parfait), soit par le trou représenté en haut à gauche, pour faire sortir la tige, soit par le trou représenté en haut à droite, pour faire rentrer la tige. Le piston a un diamètre $D = 5$ cm, et la tige un diamètre $d = 1$ cm.

1) On injecte de l'eau dans le compartiment de gauche à la pression $P_s = 5$ bar (le compartiment de droite étant à pression négligeable). Quelle force de poussée F_s obtient-on à l'extrémité de la tige?

2) On souhaite que la tige se déplace à la vitesse $V = 10$ cm/s. Quelle est alors la puissance mécanique déployée, \mathcal{P}_m , et quel est le débit volumique entrant dans le vérin correspondant, Q_V ? On en donnera d'abord les expressions littérales, puis les valeurs numériques.

3) On souhaite à présent rétracter la tige, en injectant le fluide à la même pression dans le compartiment de droite (après évacuation du compartiment de gauche, désormais à pression négligeable). Quelle force de traction, F_e , la tige exerce-t-elle alors à son extrémité?

4) Quel doit être le débit du fluide pour que la vitesse de la tige soit la même que dans le cas précédent (mais de sens opposé)?

5) On se place à nouveau dans le cas de la poussée (tige du vérin sortante, compartiment de droite vidé et à pression négligeable), mais on suppose à présent qu'une fuite de liquide a lieu dans le compartiment de gauche à travers un trou de diamètre $\delta = 0.5$ mm. La tige est toujours mise en mouvement avec la même vitesse V de 10 cm/s. En supposant que le trou ne perturbe pas significativement l'écoulement (laminaire) à l'intérieur du piston, donner l'expression de la vitesse de sortie, V_{fuite} , du liquide au niveau du trou. (On pourra négliger explicitement les grandeurs qui, compte tenu des valeurs numériques indiquées, sont effectivement négligeables.)

6) En déduire l'expression puis la valeur numérique du débit de fuite, Q_{fuite} , du liquide à travers le trou. Le débit entrant nécessaire à l'action du vérin en est-il significativement modifié?

7) Si oui, quelle devrait être la taille du trou pour que ce débit de fuite soit négligeable? Sinon, à partir de quelle taille du trou ce débit de fuite ne serait plus négligeable? (Un calcul approché sera ici amplement suffisant.)

PARTIE E - Ventilation et climatisation de la salle de contrôle.

Les opérations de contrôle de la sonde envoyée vers l'astéroïde pour sauver l'humanité sont menées depuis une salle de contrôle de volume $V = 3000 \text{ m}^3$, qu'il convient de climatiser. On souhaite y maintenir une température $T_1 = 20^\circ\text{C}$, même dans une situation où l'air extérieur serait à la température $T_2 = 40^\circ\text{C}$ (il peut faire très chaud à Kourou, en Guyane !). La pression de l'air, à l'intérieur comme à l'extérieur, est constante et égale à $P_0 = 1 \text{ bar}$. L'air est considéré comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g mol}^{-1}$ et de capacité thermique massique à pression constante : $c_p = 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. On donne également la constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ S.I.}$

- 1) Calculer la masse de l'air contenue dans la pièce.
- 2) Quelle quantité de chaleur, Q , cette masse d'air doit-elle recevoir pour passer de la température T_2 à la température T_1 .
- 3) Le système de ventilation est conçu afin de d'assurer un renouvellement complet de l'air de la pièce en une heure. Quelle puissance thermique, P_{th} , exprimée en J/s, le système de refroidissement doit-il pouvoir fournir?
- 4) L'isolation thermique de la salle de contrôle n'est pas parfaite. On constate que si l'air de la pièce est à 20°C et que l'air extérieur est à 40°C , en l'absence de ventilation et de climatisation sa température passe à 21°C en 10 minutes. Évaluer rapidement la puissance thermique P_{pertes} (en J/s) correspondant à ces pertes thermiques.
- 5) En déduire la puissance thermique totale, P_{tot} devant finalement être fournie par le système de climatisation.

Dans la suite, on prendra cette puissance égaie à $P_{\text{tot}} = 30 \text{ kW}$.

Pour assurer la climatisation proprement dite, on envisage une machine frigorifique à gaz parfait dont on donne le schéma de principe sur la Fig. 8.

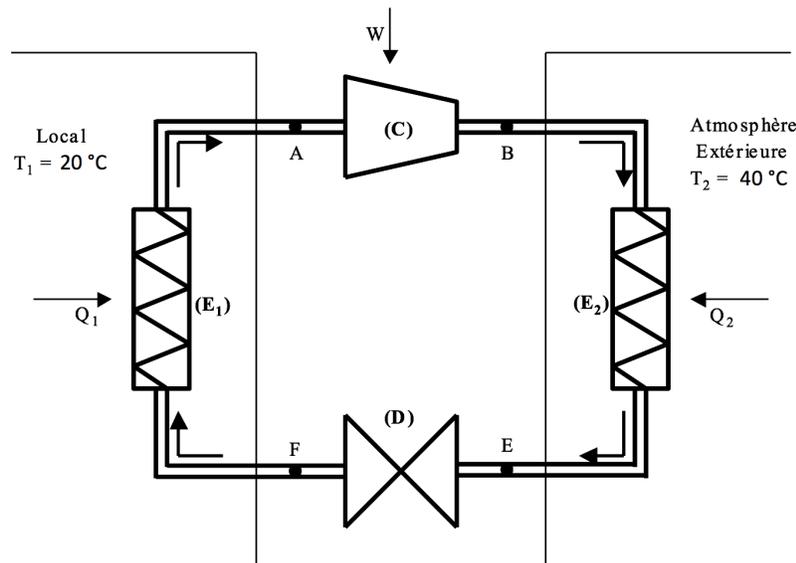


Figure 8: Schéma thermique du système de climatisation

Le fluide qui décrit le cycle est une masse $m = 1 \text{ kg}$ d'hélium, de masse molaire est $M_{\text{He}} = 4 \text{ g mol}^{-1}$.

6) Pour ce gaz, considéré comme parfait, on a $\gamma = C_P/C_V = 5/3$. Pourquoi ?

7) Rappeler la relation de Mayer reliant C_P et C_V , et déterminer la capacité thermique *massique* à pression constante, C_P , de l'hélium. Effectuer l'application numérique (en précisant les unités).

Le gaz traverse successivement (les grandeurs indiquées entre parenthèses correspondent respectivement à la température et à la pression aux points considérés):

- un compresseur (C) où le fluide subit une compression adiabatique réversible qui l'amène de A (T_1, P_1) à B (T_3, P_2).
- un échangeur (E2) où le transfert thermique de la source chaude vers le fluide est Q_2 , ce qui amène ce dernier au point E (T_2, P_2).
- un détendeur (D) où le fluide se détend de façon adiabatique réversible, ce qui l'amène en F (T_4, P_1).
- un échangeur (E1) où le transfert thermique de la source froide vers le fluide est Q_1 , ce qui ramène le fluide au point A (T_1, P_1).

On donne : $T_1 = 20^\circ\text{C}$, $T_2 = 40^\circ\text{C}$, $P_1 = 2 \text{ bar}$; $P_2 = 3 \text{ bar}$.

8) Représenter les points A, B, E et F du cycle sur un diagramme de Clapeyron (P, V). On fera également apparaître les isothermes de température T_1 et T_2 . Indiquer le sens de parcours du cycle. Que peut-on en inférer?

9) Calculer les températures T_3 et T_4 .

10) Calculer les volumes massiques aux quatre points mentionnés: V_A, V_B, V_E et V_F .

11) Calculer les transferts thermiques Q_1 et Q_2 reçus par l'hélium lors de la traversée des échangeurs (E1) et (E2). En déduire le travail W reçu par l'hélium lors de la traversée du compresseur.

12) Définir et calculer l'efficacité de l'installation.

13) Calculer la masse d'hélium qui doit, par seconde, décrire le cycle afin d'obtenir la puissance nécessaire au refroidissement de la salle de contrôle, soit $P_{\text{tot}} = 30 \text{ kW}$.

14) Calculer la puissance minimale, \mathcal{P}_{min} , du moteur actionnant le compresseur.