

CAPES Blanc - Physique - 18 nov. 2017

Proposition de correction : Etienne PAIZOT.

PARTIE E

1/ La masse d'air est $m = \rho \times V$, avec pour un gaz parfait $PV = nRT = \frac{m}{M}RT$, soit $\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$.

$$\text{Ainsi, } m = M \times \frac{PV}{RT} \approx 29 \times 10^{-3} \times \frac{10^5 \times 3000}{8.31 \times (273.15 + 20)}$$

$$\text{ou } m \approx 3600 \text{ kg.}$$

2/ La transformation étant isobare (à la pression atmosphérique), on a :

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} m c_p dT = m c_p (T_2 - T_1)$$

$$\text{A.N.: } Q \approx 72 \text{ MJ.}$$

3/ Il convient de fournir Q toutes les 3600 s.

$$\text{D'où } \mathcal{P}_{th} = \frac{Q}{\Delta t} \approx 20 \text{ kW.}$$

4/ La quantité de chaleur reçue par le gaz en $\Delta t' = 10$ minutes est $m c_p \Delta T'$, d'où une puissance de pertes thermiques :

$$\mathcal{P}_{pertes} = \frac{m c_p \Delta T'}{\Delta t'}$$

$$\text{A.N.: } \mathcal{P}_{pertes} = \frac{3600 \times 10^3 \times 1}{10 \times 60} \approx 6 \text{ kW}$$

5/ Le système de climatisation doit compenser les pertes, en plus de refroidir directement le gaz:

$$\dot{Q}_{\text{tot}} = \dot{Q}_{\text{th}} - \dot{Q}_{\text{pertes}} \approx \underline{\underline{-26 \text{ kW}}}$$

6/ L'hélium est un gaz rare, monoatomique:

Dans les conditions usuelles, ses atomes ont 3 degrés de liberté de translation, d'où $c_v = \frac{3}{2}R$,
et $c_p = \frac{5}{2}R$. Ainsi, $\gamma = \frac{5}{3}$.

7/ On a, pour n moles, $c_p - c_v = nR$.

Or $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$. D'où $c_p(1 - \frac{1}{\gamma}) = nR$

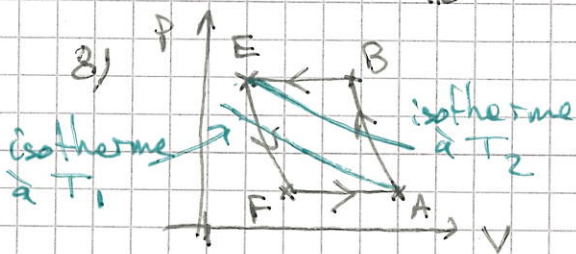
et donc $c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} nR$ pour n moles

D'où $c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{m}{M} R$, et donc $\frac{c_p}{m} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M}$.

La capacité calorifique massique est donc $\boxed{\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M}}$

A.N.: $c_p \approx \frac{5}{2} \times \frac{8.31}{4 \cdot 10^{-3}} \approx \underline{\underline{5200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}}$.

(on a utilisé $M_{\text{He}} \approx 4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$).



le cycle est parcouru comme indiqué.
D'où $W = \oint P dV > 0$:
le gaz reçoit du travail
(et cède de la chaleur).

9/ La compression est adiabatique ^{entre A et B}. Au cours de la transformation, on a donc $PV^\gamma = \text{cte}$, ou encore (puisque $PV = nRT$): $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}$.
Ainsi $T_3^\gamma P_2^{1-\gamma} = T_1^\gamma P_1^{1-\gamma}$, et $T_3 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$.

De même, la détente est adiabatique entre E et F, et donc:

$$T_4 = T_2 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

A.N.: $T_3 = 293.15 \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{5}} \approx 345 \text{ K} \approx 71.6^\circ \text{C}$

$T_4 = 313.15 \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{5}} \approx 266 \text{ K} \approx -6.90^\circ \text{C}$

10/ Dans 1 kg d'Hélium, il y a $n \approx \frac{1000}{4} \approx 250 \text{ mol}$.

D'où les volumes massiques:

$$V_A = n \frac{RT_1}{P_1} \approx 3.05 \text{ m}^3; \quad V_B = n \frac{RT_3}{P_2} \approx 2.39 \text{ m}^3$$

$$V_E = n \frac{RT_2}{P_2} \approx 2.17 \text{ m}^3; \quad V_F = n \frac{RT_4}{P_1} \approx 2.77 \text{ m}^3$$

11/ Les quantités de chaleur reçues sont $Q_1 = m c_p (T_1 - T_4)$

et $Q_2 = m c_p (T_2 - T_3)$. Pour $m = 1 \text{ kg}$ d'hélium, on a

donc $Q_1 \approx 5200 \times (20 + 6.9)$
 $\approx 140 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

et $Q_2 \approx 164 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

⚠ non précisé dans l'énoncé (désolé !)

L'hélium subit 1 transformation cyclique.

Au cours d'un cycle, $\Delta U = 0$, d'où $Q_1 + Q_2 + W = 0$.

Ainsi $W = -Q_1 - Q_2 \approx +24 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} > 0$ (il faut fournir un travail)

12) Le but de l'installation est d'ôter de l'énergie sous forme de chaleur à la source froide : Q_2 , et le "prix à payer" pour cela est le travail fourni W .

D'où l'efficacité : $\eta \equiv \frac{Q_1}{W} \approx \frac{140}{24} \approx \underline{\underline{5.8}}$

13) On veut atteindre une puissance thermique de 30 kW, c'est-à-dire extraire 30 kJ par seconde.

Or 1 kg d'hélium extrait $Q_1 \approx 140 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ par cycle.

La masse d'hélium devant parcourir le cycle chaque seconde est donc donnée par

$$\dot{m}_{\text{He}} = \frac{\dot{Q}_{\text{tot}}}{Q_1} \approx 214 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$$

14) la puissance mécanique à fournir est alors (puisque chaque kg d'hélium accomplissant le cycle nécessite un travail W):

$$\dot{P}_{\text{min}} = \dot{m}_{\text{He}} \times W \approx 5.1 \text{ kW}$$