

CAPIES Blanc - Physique - 18 nov. 2017

Proposition de correction : Etienne PARIZOT

PARTIE C

I-1)
$$\vec{f}_{S \rightarrow A} = - \frac{G M_A M_\odot}{r^2} \vec{u}_r$$

2) Le moment cinétique par rapport au centre du soleil, $\vec{L}_S = m_A \vec{r}_A \wedge \vec{v}_A = m_A \vec{r}_A \wedge \vec{v}$, est constant.

Or il est orthogonal à $\vec{r}$ et $\vec{v}$. La vitesse de l'astéroïde et son rayon vecteur restent donc toujours dans le même plan, orthogonal à $\vec{L}_S$.

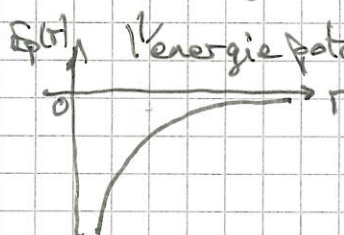
3) La vitesse de l'astéroïde s'écrit :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

D'où $\boxed{v_r(t) = \dot{r}(t)}$ et $\boxed{v_\theta(t) = r(t)\dot{\theta}(t)}$.

4) La force rappelée à la question 1) dérive de

l'énergie potentielle $E_p = - \frac{G M_\odot M_A}{r}$ ($\vec{f}_{S \rightarrow A} = - \text{grad } E_p$)



5/ On a $E_m = \frac{1}{2} m_A v^2 + E_p(r) = \frac{1}{2} m_A \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_A r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{GM_S m_A}{r}$
 ou $E_m = \frac{1}{2} m_A v_r^2 + \frac{1}{2} m_A v_\theta^2 - \frac{GM_S m_A}{r}$

6) La seule force agissant sur l'astéroïde est conservatrice. Par conséquent l'énergie mécanique (incluant l'énergie potentielle associée) est constante au cours du mouvement: $E_m = E_0$

7/ On a $\underline{M_A = \frac{4}{3} \pi R_A^3 \times \rho = 10^{10} \text{ kg}}$

8) On a $E_0 = \frac{1}{2} \times 10^{10} \times (25 + 400) 10^6 - \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \times 210 \times 10^{30}}{210^{11}} \text{ J}$
 $\approx 2.125 \cdot 10^{18} - 6.67 \cdot 10^{18}$
 $\approx \underline{\underline{-4.5 \cdot 10^{18} \text{ J}}}$

9) L'énergie totale étant négative, le système astéroïde-Soleil est un système lié, et la trajectoire gravitationnelle, qui est par ailleurs une conique, est donc une ellipse.

L'astéroïde ne saurait atteindre des distances arbitrairement élevées, car alors l'énergie potentielle excéderait l'énergie mécanique totale, ce qui est impossible.

10/ En orbite circulaire, on a une accélération centripète $\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r$, égale à $-\frac{GM_S}{r^2} \vec{u}_r$ d'après la relation fondamentale de la dynamique.

On a donc, pour cette orbite, $\frac{1}{2} m_A v^2 = \frac{1}{2} \frac{G M_0 m_A}{r}$

Par conséquent, $E_m = \frac{1}{2} m_A v^2 - \frac{G M_0 m_A}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G M_0 m_A}{r}$.

On en déduit l'expression du rayon de l'orbite circulaire d'énergie E_m :

$$r_c = - \frac{G M_0 m_A}{2 E_0} \quad (\text{où } E_0 < 0)$$

A.N.: Avec les valeurs obtenues précédemment,

on calcule $r_c \approx 1.5 \cdot 10^8 \text{ m} \approx 1.5 \cdot 10^8 \text{ km}$

NB: c'est à peu près le rayon de l'orbite terrestre!

11) On a $\vec{\sigma} = m_A \vec{r} \wedge \vec{v}_A$

12) $\vec{\sigma}$ est constant au cours du mouvement, car la force $\vec{F}_{\text{grav.}} = -\frac{G M_0 m_A}{r^2} \vec{u}_r$ a un moment nul en S. Or $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{\sigma}_{\text{grav.}}$ d'après le théorème du moment cinétique.

Ici, on a donc bien $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{0}$.

13) À $t = t_0$, on a $\vec{\sigma} = m_A r_0 \vec{u}_r \wedge (v_{r0} \vec{u}_r + v_{\theta 0} \vec{u}_\theta)$
 $= m_A r_0 v_{\theta 0} \vec{u}_z$ (où $\vec{u}_z \equiv \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$)

Donc $\sigma_0 = m_A r_0 v_{\theta 0} \approx 4 \cdot 10^{22} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$

14) En repartant de l'expression de E_m de la question 5), on peut écrire : $E_m = \frac{1}{2} m_A v_r^2 + \frac{\sigma_0^2}{2 m_A r^2} - \frac{G M_A m_A}{r}$
 (où l'on a écrit $v_\theta = \frac{\sigma_0}{m_A r}$)

15) Pour les valeurs extrémales de r , c'est-à-dire en $r_{\min}$ et $r_{\max}$, on a $v_r = \dot{r} = 0$.

D'où, en ces points : $E_m = \frac{\sigma_0^2}{2 m_A r^2} - \frac{G M_A m_A}{r} = E_0$

Ainsi : $r^2 + \frac{G M_A m_A}{E_m} r - \frac{\sigma_0^2}{2 m_A E_m} = 0$ (car $E_m = E_0$)

En introduisant $r_c = -\frac{G M_A m_A}{2 E_m}$, il vient :

$$r^2 - 2 r_c r + R^2 = 0, \text{ où } R = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2 m_A E_0}}$$

16) La résolution de cette équation donne :

$$r_{\min} = r_c - \sqrt{r_c^2 - R^2} \text{ et } r_{\max} = r_c + \sqrt{r_c^2 - R^2}$$

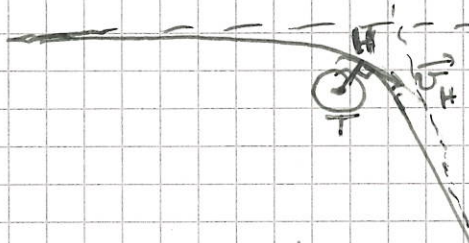
17) On a déjà calculé $r_c \approx 1.5 \cdot 10^8 \text{ km} \approx D_p$.

Or $r_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ km}$. Comme $r_0 < r_{\max}$, on

a $\sqrt{r_c^2 - R^2} > 0.5 \cdot 10^8 \text{ km}$, et donc $r_{\min} < 1.0 \cdot 10^8 \text{ km}$.

D'où l'on conclut, sans même calculer $r_{\min}$ et $r_{\max}$, que l'astéroïde est bien géocroiseur.

18) L'énergie totale, $E_m = E_c + E_p$, et le moment cinétique $\vec{\sigma}_T$ de l'astéroïde sont conservés, pour les raisons évoquées plus haut (force associée à une énergie potentielle, et passant par T, donc de moment nul).

19)  Au point H, on a $\dot{r} = 0$, où r est la distance de l'astéroïde à la Terre.

Par conséquent $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \underline{r \dot{\theta} \vec{u}_\theta}$, orthogonale à $\vec{r} = r \vec{u}_r(H)$.

20) La conservation du moment cinétique implique que $\vec{\sigma}_T(A) = \vec{\sigma}_T(H)$, soit $m_A v_0 b = m_A v_H r_H$.

La conservation de l'énergie donne par ailleurs:

$$\frac{1}{2} m_A v_0^2 = \frac{1}{2} m_A v_H^2 - \frac{G M_T m_A}{r_H}$$

En remplaçant v_H par $\frac{v_0 b}{r_H}$, on obtient:

$$v_0^2 = v_0^2 \frac{b^2}{r_H^2} - \frac{2 G M_T}{r_H}, \text{ soit } r_H^2 + 2 \frac{G M_T}{v_0^2} r_H - b^2 = 0$$

$$\text{Donc } r_H = \underline{\underline{-\frac{G M_T}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{G M_T}{v_0^2}\right)^2 + b^2}}}$$

21) A.N.: On a ici $\frac{GM_T}{v_0^2} \approx 1.6 \cdot 10^7 \text{ m} = 1.6 \cdot 10^4 \text{ km}$

Donc $\underline{r_H = \sqrt{(1.6 \cdot 10^4)^2 + 10^8} - 1.6 \cdot 10^4 \approx 2870 \text{ km}}$
(en km)

Ainsi $r_H < R_T$, et l'astéroïde percutera la Terre.

22) On veut que r_H soit supérieur à R_T .

Donc $\sqrt{\left(\frac{GM_T}{v_0^2}\right)^2 + b^2} - \frac{GM_T}{v_0^2} > R_T$

$\Leftrightarrow \left(\frac{GM_T}{v_0^2}\right)^2 + b^2 > \left(\frac{GM_T}{v_0^2} + R_T\right)^2$

$\Leftrightarrow b > \sqrt{\left(\frac{GM_T}{v_0^2} + R_T\right)^2 - \left(\frac{GM_T}{v_0^2}\right)^2} \equiv b_{\min}$

A.N.: $\underline{b_{\min} \approx [(1.6 \cdot 10^4 + 6380)^2 - (1.6 \cdot 10^4)^2]^{1/2}}$ (en km)
 $\approx 15650 \text{ km}$.

III - 23) La quantité de mouvement totale du système se conserve au cours de la collision.

Donc $(m_A + m_S) \vec{v}' = m_A \vec{v}_A + m_S \vec{v}_S$, soit $\boxed{\vec{v}' = \frac{m_A \vec{v}_A + m_S \vec{v}_S}{m_A + m_S}}$

24) On a $\tan \varphi = \frac{\vec{v}' \cdot \vec{u}_y}{\vec{v}' \cdot \vec{u}_x} = \frac{\frac{m_S}{m_A + m_A} v_S \sin \theta}{\frac{m_A}{m_A + m_A} v_A + \frac{m_S}{m_A + m_S} v_S \cos \theta}$

Dans $\boxed{\tan \varphi = \frac{m_s v_s \sin \theta}{m_A v_A + m_s v_s \cos \theta}} \approx \frac{m_s v_s \sin \theta}{m_A v_A}$ pour $\frac{m_s v_s}{m_A v_A} \ll 1$

25) Le décalage Δy pour une distance $D = dx$ le long de la trajectoire initiale s'écrit :

$$\Delta y = \tan \varphi \times dx, \text{ soit } \Delta b = D \times \tan \varphi \approx D \frac{m_s v_s \sin \theta}{m_A v_A}$$

D'où $\boxed{D = \frac{m_A v_A}{m_s v_s \sin \theta} \Delta b} \approx 5 \cdot 10^9 \text{ km}$

NB : Dans la mesure où D est ici supérieur à la longueur d'une orbite l'astéroïde, on voit qu'il conviendrait d'opérer la collision plusieurs années à l'avance !

26) Une telle collision exige un contrôle très précis des trajectoires, sans doute difficile à réaliser. Si la collision est manquée, il n'y a pas de deuxième chance. En outre, la collision pourrait conduire à l'éjection de fragments plutôt qu'à un encastrement parfait, avec un effet limité sur la trajectoire de l'astéroïde.

27) Un tel abordage présente l'avantage d'une approche à vitesse relative quasi nulle, ce qui permet des ajustements de dernière minute. Toutefois, les conditions d'arrimage peuvent être délicates (cf. Philae !). En outre, l'astéroïde tourne très probablement sur lui-même, ce qui complique l'opération de propulsion coordonnée dans une même direction...

28) Une fois posée, la sonde pourrait déployer une voile solaire. Autre possibilité : sans même se poser, on peut envisager un remorquage gravitationnel...