

CAPEES Blanc - Physique - 18 nov. 2017

Proposition de correction: Etienne PARIZOT.

PARTIE A

I-1) Le domaine infrarouge s'étend des longueurs d'ondes visibles au domaine millimétrique:

$$0.8 \mu\text{m} \lesssim \lambda \lesssim 1 \text{ mm}$$

2) À l'équilibre thermodynamique, l'énergie disponible se répartit entre les différents degrés de liberté accessibles au système.

Or la matière peut à la fois émettre et absorber de la lumière sous forme de photons. La lumière participe donc également à l'équilibre thermodynamique. D'où l'existence d'un rayonnement électromagnétique ne dépendant que de la température, T .

3/ L'énergie disponible par degré de liberté dans un système à l'équilibre thermodynamique de température T est de l'ordre de $k_B T$.
Or l'énergie d'un photon de longueur d'onde λ vaut $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$.

En ordre de grandeur, la longueur la plus représentée dans le spectre de corps noir est ainsi telle que $\frac{hc}{\lambda_{\max}} \sim k_B T$,
soit $\lambda_{\max} T \sim \frac{hc}{k_B} \sim 1.4 \cdot 10^{-2} \text{ Km}$

Ce n'est bien sûr qu'un ordre de grandeur...

4/ Pour la température moyenne de la Terre, de l'ordre de 300K, on a $\lambda_{\max} \approx 10 \mu\text{m}$

Pour une température de $\sim 30 \text{ K}$, $\lambda_{\max} \approx 100 \mu\text{m}$

Les émissions de corps noir correspondantes se situent donc dans l'infrarouge. Le rayonnement des instruments eux-mêmes camouflerait totalement les rayonnements à observer si les instruments n'étaient pas refroidis.

II - 5/

On cherche à détecter une variation de la résistance électrique du bobiniste, par la variation de la tension à ses bornes.

$$\underline{U(T) = R(T)I.}$$

Si l'intensité du courant pouvait varier, cette tension pourrait également varier même en l'absence de rayonnement incident.

6/ En fonctionnement linéaire, la tension entre les deux bornes d'entrée d'un ampli-op. idéal est nulle : $V_+ = V_-$. Par ailleurs, les courants entrant dans ces bornes sont nuls.

Soient i_1, i_2, i_3 et i_4 les courants traversant R_1, R_2, R_3 et R_4 de la gauche vers la droite sur le schéma. On a alors $i_1 = i_2$ et $i_3 = i_1 + i_4$.

Par ailleurs, $V_+ = e - R_3 i_3$

$$V_+ = R_1 i_1$$

$$V_+ = V_- = -R_1 i_1$$

$$\text{et } V_+ - V_- = 0 = R_4 i_4 - R_2 i_2.$$

Cela fait 7 équations à 7 inconnues : $(V_+, V_-, i_1, i_2, i_3, i_4)$

le système se résout très simplement:
par exemple:

$$R_c i = e - R_3 i_3 = e - R_3 i - R_3 i_4$$

$$\text{Or } i_4 = \frac{R_2}{R_4} i_2 = \frac{R_2}{R_4} i_1 \text{ et } i_1 = -\frac{V_4}{R_1} = -\frac{R_c}{R_1} i$$

$$\text{D'où } R_c i = e - R_3 i + \frac{R_3 R_2}{R_4} \frac{R_c}{R_1} i, \text{ et finalement:}$$

$$\left[R_c \left(1 - \frac{R_2 R_3}{R_1 R_4} \right) + R_3 \right] i = e, \text{ soit } i = \frac{e}{R_3 + R_c \left(1 - \frac{R_2 R_3}{R_1 R_4} \right)}$$

7) Si $R_1 R_4 = R_2 R_3$, i ne dépend manifestement pas de R_c .

8) On a en effet $i = \frac{e}{R_3}$

9) En reprenant les relations initiales, on a

$$\text{par exemple } V_3 = -R_2 i_2 - R_1 i_1 = -(R_1 + R_2) i,$$

$$\text{et } i = -\frac{V_4}{R_1} = -\frac{R_c}{R_1} i, \text{ D'où } V_3 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) R_c i$$

ou encore

$$V_3 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_c}{R_3} e$$

10) Si $R_1 = R_2$, $R_3 = R_0$ et $R_c \approx 0$, on a $V_3 \approx 2e$

Si $e = 5V$, on a $V_3 = 10V$, ce qui assure un fonctionnement linéaire, puisque $V_3 < V_{sat}$. //

III-11) La puissance thermique transférée s'exprime comme $P_{th} = G_{th}(T - T_0)$, du bolomètre vers la source froide.

12) Il s'agit de l'effet Joule:

James Prescott Joule a été actif au XIX^e siècle (1818 - 1889). On a $P_J = R \times I^2$

13) Le bolomètre reçoit $P_{rad} + P_J = P_{rad} + R(T)I^2$ et cède $P_{th} = G_{th}(T - T_0)$.

L'énergie reçue sous forme de chaleur pendant un intervalle de temps dt est donc

$$dQ = [P_{rad} + R(T)I^2 - G_{th}(T - T_0)] dt$$

Ceci conduit à une variation de température dT telle que $C_p dT = dQ$.

$$C_p \frac{dT}{dt} = P_{rad} + R_0 I^2 + \alpha R_0 (T - T_0) I^2 - G_{th}(T - T_0)$$

$$\text{soit } C_p \frac{dT}{dt} = \frac{G_{th}}{\alpha R_0 I^2} P_{rad} + R_0 I^2 + (G_{th} - \alpha R_0 I^2) T_0$$

et finalement $\tau \frac{dT}{dt} + T = \beta(P_{rad})$, où $\tau = \frac{C_p}{G_{th} - \alpha R_0 I^2}$

$$\text{et } \beta(P_{\text{rad}}) = \frac{P_{\text{rad}} + R_0 I^2}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2} + T_0$$

(correspondant
au régime
transitoire)

14) L'équation sans second membre s'écrit

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = 0, \text{ soit } \frac{dT}{T} = -\frac{dt}{\tau},$$

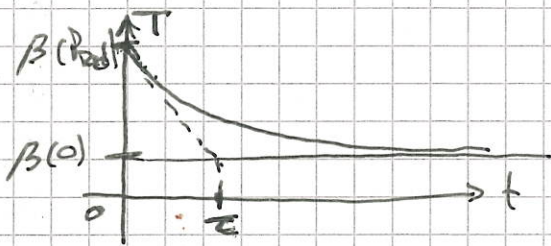
dont la solution générale est une exponentielle en $e^{-\frac{t}{\tau}}$. La stabilité est donc assurée

si $\tau > 0$. Or $\tau = \frac{C_p}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2}$, où $C_p > 0$
 $G_{\text{th}} > 0$
 $R_0 > 0$

Si $\alpha < 0$, on a bien $\tau > 0$, quelles que
 soient les valeurs
 des autres grandeurs.

15) Une solution constante de l'équation ci-dessus est à l'évidence $T_p = \beta(P_{\text{rad}})$, qui est donc la température du bolomètre soumis au flux incident permanent P_{rad} .

16) L'évolution de T est la solution de l'équation différentielle avec pour condition initiale $T(0) = \beta(P_{\text{rad}})$. Elle décroît exponentiellement avec la constante de temps τ jusqu'à la valeur d'équilibre $T_0 = \beta(0)$.



$$\text{NB: } \beta(0) = \frac{R_0 I^2}{G_{th} - \alpha R_0 I^2} + T_0$$

17) On a vu que $\tau = \frac{C_p}{G_{th} - \alpha R_0 I^2}$.

Si la capacité thermique, C_p , croît, la constante de temps augmente. La raison en est que pour une même différence de température, il y a une plus grande quantité d'énergie à évacuer sous forme de chaleur : $Q = C_p \Delta T$.

Or le taux de transfert thermique, fixé par la conductance G_{th} , ne varie pas. Il faut donc plus de temps pour atteindre le nouvel équilibre.

En revanche, pour une capacité thermique donnée, si on augmente la conductance thermique, les transferts de chaleur sont plus rapides, et la constante de temps τ décroît, comme le montre en effet son expression littérale.

IV- 18) Rectification: $\Theta(t) = \Re(\underline{\Theta}(t))$.

19) On a $\tau \frac{dT}{dt} + T = \beta(P_{\text{rad}}) = \frac{P_{\text{rad}} + R_0 I^2}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2} + T_0$,

où $P_{\text{rad}} = P_{\text{rad},0} + P_0 \cos \omega t$.

On introduit la température de réponse du bolomètre pour une puissance de rayonnement non modulée $P_{\text{rad},0}$: $T_1 = \frac{P_{\text{rad},0} + R_0 I^2}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2} + T_0$.

On a alors $\tau \frac{dT}{dt} + T = T_1 + \frac{P_0 \cos \omega t}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2}$.

Or $\frac{dT}{dt} = \frac{d(T - T_1)}{dt} = \frac{d\Theta}{dt}$.

D'où finalement $\tau \frac{d\Theta}{dt} + \Theta = \frac{P_0 \cos \omega t}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2}$.

En introduisant $\underline{\Theta}(t)$: $\tau \frac{d\underline{\Theta}}{dt} + \underline{\Theta} = \frac{P_0}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2} e^{i\omega t}$.

20) On a $\frac{d\underline{\Theta}}{dt} = i\omega \underline{\Theta}$. D'où $(i\omega \tau + 1)\underline{\Theta} = \frac{P_0 e^{i\omega t}}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2}$.

En prenant le module de cette égalité, on obtient bien la forme cherchée: $\Theta_0 = \frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$.

où $A = \frac{P_0}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2}$.

21) On a $U(t) = R(t)I = [R_0 + \alpha R_0(T - T_0)] I$
 $= \alpha R_0 I \Theta(t)$ cte

$U(t)$ oscille donc avec la même pulsation que $\Theta(t)$, c'est-à-dire ω , et avec l'amplitude $U_0 = \alpha R_0 I \Theta_0 = \frac{\alpha R_0 I A}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$.

22) D'où la sensibilité

$$S(\omega) = \frac{U_0}{P_0} = \frac{\alpha R_0 I}{G_{th} - \alpha R_0 I^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

23) On note $S_0 = \frac{\alpha R_0 I}{G_{th} - \alpha R_0 I^2}$.

On a alors $S(\omega) = \frac{S_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$.

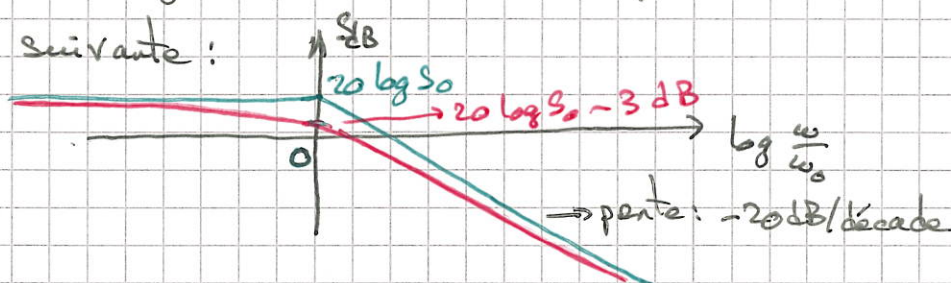
Pour $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, $S(\omega) \approx S_0$

Pour $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, $S(\omega) \approx \frac{S_0}{\omega \tau}$

24) Ainsi, pour $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, $S_{dB} \approx 20 \log S_0$ exprimé en S.I. pour l'adim.
 et pour $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, $S_{dB} \approx 20 \log S_0 - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$

où on a défini $\omega_0 \equiv \frac{1}{\tau}$.

Le "diagramme de Bode" correspondant a une allure suivante :



En $\omega = \omega_0$, c'est-à-dire $\log \frac{\omega}{\omega_0} = 0$, on a

$$S_{dB} = 20 \log S_0 + 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 20 \log S_0 - 3 \text{ dB}.$$

ω_0 est la pulsation de coupure "à -3dB".

25/ Il s'agit d'un filtre passe bas, de pulsation de coupure $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$.

26) A haute fréquence, $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, la conductance thermique entre le bolomètre et son environnement n'est pas suffisante pour que la température puisse s'ajuster assez rapidement pour être détectée (via la variation de résistance, et donc de tension). Le temps de réponse est trop grand: le bolomètre ne suit pas.

27/ La sensibilité $S_0 = \frac{\alpha R_0 I}{G_{th} - \alpha R_0 I}$ augmente G_{th} diminue.

Mais cela se fait au détriment du temps de réponse, τ qui s'allonge. Remarque: On a $S_0 = \frac{\alpha R_0 I}{G_{th}} \times \tau$.