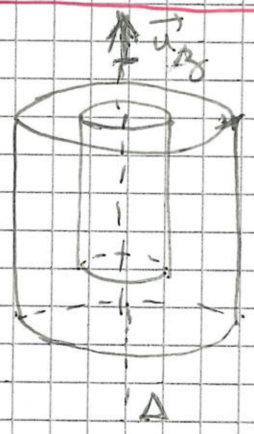
Exercice 8 : énergie magnétique et coefficient d'auto-induction



1) Tout plan contenant l'axe est plan de symétrie de la distribution de courant. Par conséquent, $\vec{B}$ est orthogonal à ces plans, c'est-à-dire dirigé suivant $\vec{u}_\theta$.

En outre, par symétrie (rotation autour de l'axe, translation le long de l'axe), $\vec{B}$ ne dépend ni de θ, ni de z, coordonnées cylindriques naturelles.

D'où $\boxed{\vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta}$. Enfin, par application du théorème d'ampère à un cercle d'axe Δ et de rayon r, on obtient :

$$\oint_{\mathcal{C}(r)} \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_\Sigma = \mu_0 \iint_{\Sigma(r)} \vec{j}\cdot\vec{dS}$$

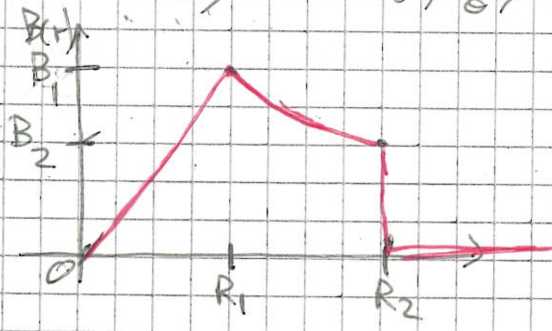
- Pour $0 \leq r < R_1$, on a $\iint_{\Sigma(r)} \vec{j}\cdot\vec{dS} = j_0 \times \pi r^2$ où $j_0 = \dfrac{I}{\pi R_1^2}$

(puisque $I = \iint_{\Sigma(R_1)} j_0 \vec{u}_z\cdot\vec{dS}$).

D'où $\boxed{B(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{r}{R_1^2}}$ pour $0 \leq r < R_1$.

- Pour $R_1 < r < R_2$, on a $\iint_{\Sigma(r)} \vec{j}\cdot\vec{dS} = I$. D'où $\boxed{B(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}}$ pour $R_1 < r < R_2$
- Pour $r > R_2$, on a $\iint_{\Sigma(r)} \vec{j}\cdot\vec{dS} = 0$. D'où $\boxed{\vec{B} = \vec{0}}$ pour $r > R_2$

En résumé, $\vec{B} = B(r)\,\vec{u}_\theta$, avec $B(r)$ comme sur la figure :



où $B_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R_1}$ et $B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R_2}$

NB : La discontinuité en R_2 vaut $\vec{B}(R_2^+) - \vec{B}(R_2^-) = \vec{j}_S \wedge \vec{u}_r$, avec $\vec{j}_S = -\dfrac{I}{2\pi R_2}\vec{u}_z$, comme il se doit !

2) L'énergie magnétique s'obtient en intégrant la densité d'énergie $u_{magn} = \frac{B^2}{2\mu_0}$ sur le volume situé entre z et $z+l$ (pour une longueur l de câble).

On obtient : $U_{magn} = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{l}{2\mu_0} \int_0^{R_2} B^2(r) \times 2\pi r \, dr$,

soit $U_{magn} = \frac{l}{2\mu_0} \times \left[\frac{\mu_0^2 I^2}{2\pi R_1^4} \int_0^{R_1} r^3 dr + \frac{\mu_0^2 I^2}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \right]$

$$\boxed{U_{magn} = \frac{l \mu_0 I^2}{4\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right]}$$

3) L'étude générale de l'auto-induction montre que l'énergie emmagasinée dans un circuit de coefficient d'auto-induction L vaut $\frac{1}{2} L I^2$ et n'est rien d'autre que l'énergie du champ magnétique produit par le courant I dans le circuit.

Par identification, on obtient donc $L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$,

ou encore $\boxed{\Lambda = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{4} \right)}$