Exercice 7 : Théorème d'Ampère généralisé

1/ Les équations de Maxwell indiquent en particulier que $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$. Il en résulte que le flux de $\vec{B}$ sortant de n'importe quelle surface fermée Σ est nul :

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{B}\cdot\vec{dS} = \iiint_{V} \mathrm{div}\,\vec{B}\, d\tau = 0 \qquad \text{(Théorème de Green-Ostrogradski)}$$

En appliquant cette propriété à la surface $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, orientée vers l'extérieur (c'est-à-dire avec la partie Σ_2 orientée comme sur la figure et la partie Σ_1 orientée dans le sens opposé à celui de la figure), on a :

$$\phi = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{B}\cdot\vec{dS} = \iint_{\Sigma_1} \vec{B}\cdot\vec{dS} + \iint_{\Sigma_2} \vec{B}\cdot\vec{dS} = -\phi_1 + \phi_2 .$$

Or $\phi = 0$. Donc $\boxed{\phi_1 = \phi_2}$

2) Le théorème d'Ampère est une conséquence de l'équation dite de Maxwell-Ampère : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ (en régime stationnaire). Par intégration sur une surface Σ, délimitée par un contour Γ orienté (en conformité avec l'orientation de Σ), on a :

$$\iint_{\Sigma} \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\cdot\vec{dS} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j}\cdot\vec{dS} = \mu_0 I_{\Sigma}$$ où I_{Σ} est le courant traversant Σ.

Or, par le théorème de Stokes-Ampère,

$$\iint_{\Sigma} \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\cdot\vec{dS} = \oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot\vec{dl}.$$ D'où $\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{\Sigma}}$.

3) On a d'une part $\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{\Sigma_1}$

et d'autre part $\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{\Sigma_2}$.

Or aucun courant ne traverse Σ_2, donc $I_{\Sigma_2} = 0$, et par suite on doit également avoir $I_{\Sigma_1} = 0$. Or $I_{\Sigma_1} = I$: le courant dans le circuit.

Par conséquent, en régime permanent, on doit avoir $I=0$.

Cette propriété est bien connue en électrocinétique : en régime permanent, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

4) En régime variable, on a $\boxed{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}$.

5/ On en déduit le théorème d'Ampère généralisé :

$$\boxed{\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl}} = \iint_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\cdot\vec{dS} = \mu_0 \iint\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\vec{dS}$$

$$\boxed{= \mu_0 I_\Sigma + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint \vec{E}\cdot\vec{dS}}.$$

6/a) Le champ $\vec{E}$ créé entre les armatures est uniforme et orthogonal aux plans des armatures : $\vec{E} = E_0\,\vec{u}_\perp$.

Par ailleurs, la différence de potentiel entre les armatures est donnée par $U = V_1 - V_2 = -\int_1^2 dV = \int_1^2 \vec{E}\cdot\vec{dr} = E_0 l$, où l est la distance entre les armatures, et où on a utilisé la relation $\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}\,V$.

Donc $\boxed{E_0 = \frac{U}{l}}$. On peut également écrire $U = \frac{q}{C}$, où q est la charge portée par la plaque du condensateur représentée en bas sur la figure, si $\vec{u}_\perp$ est orienté vers le haut.

Or $C = \varepsilon_0 \frac{S}{l}$, où S est la surface des plaques en regard.

D'où, finalement : $\boxed{\vec{E} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}\vec{u}_\perp}$

b) On a d'une part $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I$, en utilisant la surface Σ_1, puisque $\vec{E} = \vec{0}$ en tout point de Σ_1.

D'autre part, en utilisant Σ_2, $I_{\Sigma_2} = 0$, et $\iint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}\times S = \frac{q}{\varepsilon_0}$

d'où $\mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \mu_0 \frac{dq}{dt} = \mu_0 I$.

CQFD.