Exercice 6 : Pince ampèremétrique

1) Tout plan contenant le fil est plan de symétrie de la distribution de courant. En tout point, $\vec{B}$ doit donc être orthogonal au plan contenant le fil et ce point (car $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur).

Ainsi $\vec{B}$ est orthoradial, c'est-à-dire dirigé suivant $\vec{u_\theta}$ (coordonnées cylindriques).

Par ailleurs, la symétrie de rotation autour du fil implique que $\vec{B}$ ne dépend pas de θ.
Et la symétrie de translation le long du fil implique que $\vec{B}$ ne dépend pas de z.

Finalement, on a $\boxed{\vec{B} = B(r)\,\vec{u_\theta}}$

On peut alors appliquer le théorème d'Ampère le long d'un cercle centré sur le fil, orthogonal au fil et de rayon r, orienté en conformité avec l'orientation du fil (règle du tire-bouchon) :

$$\oint_{\mathcal{C}(r)} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I \text{ , soit } \oint_{\mathcal{C}(r)} B(r)\times r\,d\theta = \mu_0 I.$$

$$\Leftrightarrow \quad r B(r)\times 2\pi = \mu_0 I \text{, et donc } B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Finalement : $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u_\theta}}$

2) À travers chaque spire de la bobine, le flux de $\vec{B}$ est donné par $\phi_{spire} = \iint_{spire} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u_\theta}\cdot\vec{dS}$.

L'hypothèse $d \ll D$ permet de faire l'approximation $\vec{B} \simeq \frac{\mu_0 I}{2\pi D}\,\vec{u_\theta}$ à travers une spire. D'où $\phi_{spire} \simeq \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \times S_{spire}$.

Avec $S_{spire} = S = \frac{\pi d^2}{4}$, on obtient :

$\phi_{spire} \simeq \frac{\mu_0 I d^2}{8D}$, et donc, à travers les N spires : $\phi = N\phi_{spire}$,

soit $\boxed{\phi = \frac{\mu_0 N I d^2}{8D}}$ ou $\boxed{\phi = \frac{\mu_0 N I}{2\pi D}\times S}$

3) On voit que ϕ est proportionnel à I, comme il se doit, et le coefficient d'inductance mutuelle est par définition le coefficient de proportionnalité.

D'où $\boxed{M = \frac{\mu_0 N d^2}{8D}} = \frac{\mu_0 N}{2\pi D} s$

4) Il apparaît une force électromotrice induite dès lors que le flux du champ $\vec{B}$ à travers le circuit varie. C'est le cas ici, puisque le courant I est variable.

D'après l'énoncé, on a $I = I_0 \cos(2\pi \nu t)$

La loi de Faraday donne : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -M\frac{dI}{dt}$

D'où $\boxed{e = M I_0 2\pi\nu \sin(2\pi\nu t)}$

5) A.N. : $e = \frac{\mu_0 N I_0 s \nu}{D} \sin 2\pi\nu t \equiv e_0 \sin 2\pi\nu t$,

avec $\underline{e_0 \simeq 6.3 \text{ mV}}$

6) Ce montage permet de déterminer l'intensité du courant dans le fil, ainsi que sa fréquence, sans intervenir sur le circuit, ni même y toucher. Connaissant N, s et D, par construction de la "pince ampèremétrique", on détermine ν et D en mesurant e (fréquence et amplitude) :

$$\underline{I_0 = \frac{D}{\mu_0 N s \nu} \times e}.$$