

Exercice 5 : Rails conducteurs et loi de Faraday.

1) La barre mobile ferme le circuit et le délimite ;
 il est constitué de la branche comprenant la résistance R ,
 des portions de rails jusqu'à la barre, et de la barre elle-même.
 Ce circuit est rectangulaire, et la surface du
 rectangle qu'il délimite est $S = dx \cdot x$ (en prenant
 l'origine des x au niveau de la branche de la résistance R).

Le flux du champ $\vec{B}$ à travers ce rectangle vaut ;

$$\boxed{\phi = \int_{\text{rectangle}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \times S = B dx} \quad , \text{ puisque } \vec{B} \text{ est uniforme.}$$

NB : on a choisi d'orienter la surface
 dans le même sens que $\vec{B}$, ce qui
 revient à orienter le circuit comme ceci :
 (règle du tire-bouchon).



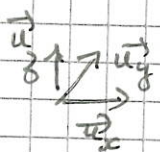
Le mouvement de la barre entraîne une variation de S
 et du flux de $\vec{B}$ à travers le circuit. Il en résulte
 l'apparition d'un courant induit, associé à une "force
 électromotrice" ϵ , dont l'expression est donnée par la
 loi de Faraday :

$$\boxed{\epsilon = - \frac{d\phi}{dt}}$$

2) On a ici $\boxed{\epsilon = - \frac{d\phi}{dt} = - B d \frac{dx}{dt} = - B d v}$, et donc $\boxed{i = \frac{\epsilon}{R} = - \frac{B d v}{R}}$
 (avec l'orientation choisie)

3) La force de Laplace exercée sur la barre en raison de
 ce courant est :

$$\vec{F} = \int_{\text{barre}} i d\vec{l} \wedge \vec{B} = i \int_{\text{barre}} dl \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = i dx B \vec{u}_x$$



En remplaçant i par son expression : $\vec{F} = - \frac{B^2 d^2}{R} v \vec{u}_x$,
 ou encore

$$\boxed{\vec{F} = - \frac{B^2 d^2}{R} \vec{v}}$$

La loi de Lenz indique que les effets d'un courant induit s'opposent à sa cause. Cette loi générale est effectivement vérifiée ici, puisque la force de Laplace résultante est dirigée dans le sens opposé au déplacement de la barre, qui est à l'origine du courant.

(NB: on note également que le champ $\vec{B}$ créé par le courant induit i , qui est négatif pour l'orientation choisie, est dirigé suivant $-\vec{u}_z$, et s'oppose donc au champ $\vec{B}$ extérieur.)

4) En projection sur le plan horizontal, et même suivant l'axe des x , le mouvement de la barre s'écrit:

$$m \ddot{x} = F_x = - \frac{B^2 d^2}{R} \dot{x} \quad \text{ou encore} \quad \frac{dv}{dt} = - \frac{B^2 d^2}{mR} v$$

On en déduit $\frac{dv}{v} = - \frac{B^2 d^2}{mR} dt$, soit $v = v_0 e^{-\frac{B^2 d^2}{mR} t}$,

en tenant compte de la condition initiale: $v(t=0) = v_0$.

5) Au cours du mouvement, la barre perd son énergie cinétique initiale: $E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$. Le théorème de l'énergie cinétique indique que $\Delta E_c = W(\vec{F})$, où $\vec{F}$ est la force agissant sur la barre. Vérifions-le: ici, $\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$ et $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$, où l'intégrale couvre le déplacement depuis $t=0$ jusqu'à l'arrêt de la barre, formellement à $t=\infty$.

Avec $\vec{F} = -\frac{B^2 d^2}{R} \vec{v}$ et $d\vec{r} = \vec{v} dt$, on a $W = \int_0^\infty -\frac{B^2 d^2}{R} v^2 dt$.

En remplaçant $v(t)$, on obtient $W = -\frac{B^2 d^2}{R} v_0^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2B^2 d^2}{mR} t} dt$.

Le calcul est immédiat et donne $W = -\frac{1}{2} m v_0^2$, comme il se doit!

Mais où est finalement passée l'énergie? Réponse: elle a été dissipée dans la résistance, par effet Joule! Vérifions-le: la puissance dissipée est $\mathcal{P} = R i^2 = \frac{B^2 d^2}{R} v^2$, qui dépend du temps parce v dépend du temps. L'énergie totale dissipée est simplement $E_{\text{Joule}} = \int \mathcal{P} dt = \int_0^\infty \frac{B^2 d^2}{R} v^2 dt = \frac{B^2 d^2}{R} v_0^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2B^2 d^2}{mR} t} dt$. On obtient $E_{\text{Joule}} = \frac{1}{2} m v_0^2$, CQFD!