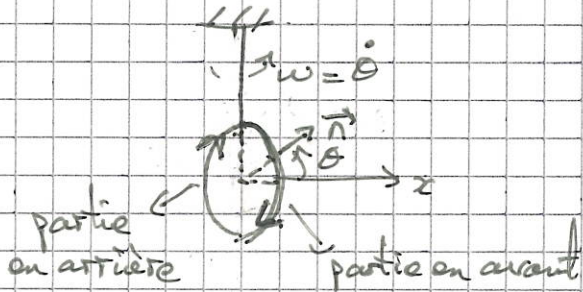


## Exercice 12: Induction et freinage

1) La "règle du tire-bouchon" donne la réponse:



$$2) \text{ On a } \phi = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \iint_{\text{spire}} d\vec{S} = B_0 \vec{u}_z \cdot \pi a^2 \vec{n}$$

$$\text{Donc } \boxed{\phi = \pi a^2 B_0 \cos \theta}$$

3) La rotation de la spire modifie l'angle  $\theta$ , et donc également le flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit.

Il apparaîtra donc un courant induit, associé à la force électromotrice induite donnée par la loi de Faraday:

$$\boxed{e = - \frac{d\phi}{dt}}$$

4) La spire ayant globalement la résistance électrique  $R$ , l'intensité du courant induit (dans le sens d'orientation indiqué) est donnée par:

$$I = \frac{e}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt}$$

$$\text{D'où } \boxed{I = \frac{\pi a^2 B_0 \dot{\theta} \sin \theta}{R}}$$

5) Pour  $\omega_0 > 0$ , on a  $\dot{\theta} > 0$  et  $\sin \theta > 0$  tant que  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire sur le premier quart de tour.

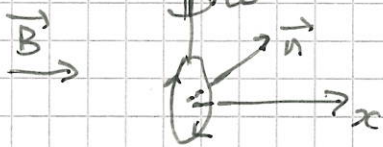
On a alors  $I > 0$ , de sorte que le champ  $\vec{B}'$  induit par le courant dans la bobine créera un flux positif à travers elle ( $\vec{B}' \cdot \vec{n} > 0$ ), et donc compenser partiellement la diminution du flux de  $\vec{B}$  à travers la spire, causée par la rotation. Ce résultat est conforme à la loi de Lenz, qui indique de manière générale que les effets d'un courant induit s'opposent à la cause l'ayant engendré.



6) Le moment magnétique  $\vec{\mu}$  associé à une spire de courant est donné par  $\vec{\mu} = I \vec{S} = I // \vec{S}$  <sub>spire</sub>.

Ici, on a donc  $\vec{\mu} = \pi a^2 I \vec{n}$ .

7) Dans un champ uniforme, la résultante des forces de Laplace sur le moment magnétique est nulle, mais il s'exerce un couple donné par  $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ .



On a donc  $\vec{\Gamma} = \pi a^2 I \vec{n} \wedge B_0 \vec{u}_z$ ,

soit  $\vec{\Gamma} = -\pi a^2 B_0 I \sin\theta \vec{u}_z$ .

En remplaçant l'expression de  $I$  trouvée à la question 4), on obtient :

$$\vec{\Gamma} = -\frac{1}{R} (\pi a^2 B_0 \sin\theta)^2 \dot{\theta} \vec{u}_z,$$

ou encore

$$\vec{\Gamma} = -\frac{1}{R} (\pi a^2 B_0 \sin\theta)^2 \vec{\Omega}, \text{ où } \vec{\Omega} \equiv \dot{\theta} \vec{u}_z$$

est le vecteur rotation de la spire.

D'où  $\vec{\Gamma} = -K \vec{\Omega}$ , avec  $K > 0$ .

Le couple est donc résistant (il s'oppose à la rotation), et induit donc un freinage, conforme à la loi de Lenz.

8) Le théorème du moment cinétique appliqué à la spire, par rapport à son diamètre s'écrit (en projection sur  $\vec{u}_z$ ) :  $\frac{d\sigma_z}{dt} = \Gamma$ , avec  $\sigma_z = J \Omega$ .

$$\text{D'où } J \dot{\Omega} = -K \Omega, \text{ ou } \dot{\Omega} = -\frac{(\pi a^2 B_0 \sin\theta)^2}{R J} \Omega.$$

$$\text{or } J = \frac{1}{2} M a^2.$$

$$\text{Donc } \dot{\Omega} = f(\theta) \Omega, \text{ avec } f(\theta) = -\frac{2}{\pi R} (\pi a B_0 \sin\theta)^2$$



9) En notant que  $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$ , et que  $\dot{\theta} dt = d\theta$ , on peut réécrire l'équation précédente comme:

$d\dot{\theta} = f(\theta) d\theta$ , et l'intégrer de l'instant initial, où  $\theta=0$ , à "l'instant courant", où l'angle est  $\theta$ :

$$\int_0^{\theta} d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} f(\theta') d\theta' = -\frac{2}{MR} (\pi a B_0)^2 \int_0^{\theta} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$

D'où  $\dot{\theta}(\theta) - \dot{\theta}(0) = -\frac{2(\pi a B_0)^2}{MR} \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]$

Avec  $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ , on obtient:  $\dot{\theta}(\theta) = \omega_0 - \frac{(\pi a B_0)^2}{MR} \left[ \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]$

10) La spire s'arrête lorsque  $\dot{\theta} = 0$ , c'est-à-dire pour  $\theta_1$  tel que:

$$\theta_1 - \frac{\sin 2\theta_1}{2} = \frac{MR\omega_0}{\pi^2 a^2 B_0^2}$$

La résolution de cette équation donne l'angle d'arrêt,  $\theta_1$ , sans qu'il soit besoin de connaître  $\theta(t)$ .

11) Si  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ , alors  $\sin 2\theta_1 = 0$ , et  $B_0 = \left( \frac{2MR\omega_0}{\pi^3 a^2} \right)^{1/2}$

12) A.N.:  $B_0 \approx 0.11 \text{ T}$

13) La puissance dissipée par effet Joule est  $\mathcal{P}(t) = R I(t)^2$ , où  $I(t)$  est donné par  $I(t) = \frac{\pi a^2 B_0}{R} \sin \theta \dot{\theta}$  (cf. question 4).

D'où  $\mathcal{P}(t) = \frac{1}{R} (\pi a^2 B_0)^2 \sin^2 \theta \times \dot{\theta}^2$ , ou encore, en introduisant  $f(\theta)$ :

$$\mathcal{P}(t) = -\frac{1}{2} M a^2 f(\theta) \dot{\theta}^2. \text{ Or } f(\theta) \dot{\theta} = \ddot{\theta} \text{ et } \frac{1}{2} M a^2 = J.$$

Donc  $\mathcal{P}(t) = -J \ddot{\theta} \dot{\theta} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \right)$

L'énergie dissipée par effet Joule jusqu'à l'arrêt est donc

$$E_{\text{Joule}} = \int_0^{\infty} \mathcal{P}(t) dt = -\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \right) dt = -\left[ \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{2} J \omega_0^2$$

Or  $\frac{1}{2} J \omega_0^2$  est l'énergie cinétique de rotation initiale. Cette relation exprime donc la conservation de l'énergie!