Exercice 11 : champ magnétique et inductance mutuelle

1) a) On a $\boxed{\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\,\vec{u}_\theta}$ (voir le cours et la correction de l'exercice 6).

b) Le champ crée par un élément de fil $\vec{dl}$ décroît comme le carré de la distance au fil (cf. loi de Biot et Savart). Même si la longueur du fil de retour circulaire croît comme R_2, le champ créé par ce fil décroît en $\frac{R_2}{L^2}$ si on se trouve à une distance L du fil.

Ainsi, si $R_1 \ll R_2$, on a $L \sim R_2$, et la contribution du champ créé par le fil est d'ordre $\frac{R_2}{L^2} \sim \frac{1}{R_2}$, qui tend vers 0 pour R_2 "grand".

La condition cherchée est donc simplement $\boxed{R_1 \ll R_2}$.

2/ a) Tout plan contenant l'axe du tore est plan de symétrie. Par conséquent, $\vec{B}$ lui est orthogonal, et donc $\vec{B}_2 = B_2(r,\theta,z)\,\vec{u}_\theta$.

Par ailleurs, la symétrie de révolution autour de l'axe implique que B_2 ne dépend pas de θ.

D'où $\boxed{\vec{B}_2 = B_2(r,z)\,\vec{u}_\theta}$

b) On applique le théorème d'Ampère à un cercle d'axe Δ de rayon r, situé dans le plan d'ordonnée z : $\mathcal{C}_\Delta(r,z)$.

On a : $\oint_{\mathcal{C}_\Delta(r,z)} \vec{B}_2 \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{\Sigma(r,z)}$, où $\Sigma_{(r,z)}$ est le disque délimité par $\mathcal{C}_\Delta(r,z)$, orienté suivant $\vec{u}_\theta$.

D'où $B_2(r,z) \times 2\pi r = \mu_0 I_{\Sigma(r,z)}$.

Pour tout point situé à l'extérieur du tore, on a $I_{\Sigma(r,z)} = 0$, donc $\vec{B}_2 = \vec{0}$.

Pour un point à l'intérieur du tore $I_\Sigma = N I_2$, et $\boxed{\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 N I_2}{2\pi r}\,\vec{u}_\theta}$, qui se trouve être indépendant de z.

2) c) On a $\phi_{spire} = \iint_{spire} \vec{B_2} \cdot \vec{dS}$, avec $\vec{dS} = dr \times dz \, \vec{u_\theta}$.

D'où $\boxed{\phi_{spire} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \int_{-a}^{a} dz \times \int_{R-a}^{R+a} \frac{dr}{r} = \mu_0 \frac{N I_2 a}{\pi} \ln \frac{R+a}{R-a}}$.

d) À travers les N spires de la bobine, on a donc

$\phi_{tot} = \mu_0 \frac{N^2 a}{\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right) \times I_2$. Or par définition,

$\phi = L \times I_2$.

↓ coefficient d'auto-induction.

D'où $\boxed{L = \mu_0 \frac{N^2 a}{\pi} \ln \frac{R+a}{R-a}}$.

e) A.N. : $\boxed{L \simeq 1.62 \text{ mH}}$

3) a) Le calcul est identique au calcul des questions 2a) et 2b), mais cette fois avec le champ $\vec{B_1}$, au lieu du champ $\vec{B_2}$. Il suffit donc de remplacer $N I_2$ par I_1.

On a donc $\boxed{\phi_2(\vec{B_1}) = \frac{\mu_0 N a}{\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right) \times I_1}$

b) Par définition, $\underline{\phi_2 = M_{21} I_1}$. D'où $\boxed{M_{21} = \frac{\mu_0 N a}{\pi} \ln \frac{R+a}{R-a}}$.

c) A.N. : On a $M_{21} = \frac{L}{N}$. D'où $\underline{\underline{M_{21} \simeq 1.62 \, \mu\text{H}}}$.

d) Le circuit 1 délimite une surface qui est un demi-disque de rayon R_2.
Mais le champ $\vec{B_2}$ est nul en tout point de ce demi-disque sauf sur le carré correspondant à une spire de la bobine.
Le flux de $\vec{B_2}$ à travers le circuit 1 est donc celui calculé à la question 2c) : $\boxed{\phi_1(\vec{B_2}) = \phi_{spire} = \mu_0 \frac{N a}{\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right) \times I_2}$.

e) Par définition, $\phi_1(\vec{B_2}) = M_{12} I_2$, d'où $\boxed{M_{12} = \frac{\mu_0 N a}{\pi} \ln \frac{R+a}{R-a}}$.

f) On a donc $\boxed{M_{12} = M_{21}}$, c'est un résultat général qui se démontre pour n'importe quelle paire de circuits, et qui autorise à parler de coefficient d'inductance mutuelle $\boxed{M = M_{12} = M_{21}}$