Exercice 10 : solénoïde infini et induction

1) On a $\boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_\Delta}$ à l'intérieur du solénoïde, où Δ est l'axe du solénoïde, et $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur.

2) $\vec{A}$ est défini (à un gradient près) par $\vec{rot}\vec{A} = \vec{B}$.
$\vec{A}$ est un "vrai vecteur", et est donc orthogonal à tous les plans d'antisymétrie. Dans le solénoïde infini décrit dans l'énoncé, tout plan contenant l'axe est plan d'antisymétrie pour la distribution de courant. Par conséquent, $\vec{A}$ est partout orthogonal à ces plans, et est donc dirigé en tout point suivant $\vec{u}_\theta$.
Par ailleurs, la symétrie de révolution autour de l'axe et de translation le long de l'axe, implique que $\vec{A}$ ne dépend ni de θ, ni de z (coordonnée le long de l'axe), et donc seulement de r.

On a donc $\vec{A}(r,\theta,z) = A(r)\,\vec{u}_\theta$.

L'expression de $\vec{rot}\vec{A}$ est alors simplifiée en :
$$\vec{rot}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\,\vec{u}_z .$$

Ainsi, à l'extérieur du solénoïde, $\vec{rot}\vec{A} = \vec{0}$ implique
$$\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) = 0 \quad , \text{ soit } \quad A_\theta = \frac{K}{r} \text{ , où } K = c^{te} .$$
La constante K peut être déterminée par continuité avec la valeur de $\vec{A}$ à l'intérieur du solénoïde. Celle-ci s'obtient de la même façon, en écrivant
$$\vec{rot}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\,\vec{u}_z = \mu_0 n I\,\vec{u}_z \text{ , soit } \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) = \mu_0 n I r .$$
D'où $rA_\theta = \frac{1}{2}\mu_0 n I r^2$ et $\boxed{A_\theta = \frac{\mu_0 n I r}{2}}$. Ainsi, en $r=a$, on a $A_\theta^{(a)} = \mu_0 \frac{n I a}{2}$. Donc $K = \frac{\mu_0 n I a^2}{2}$. Finalement, $\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0 n I a^2}{2r}\vec{u}_\theta}$

3) Un courant induit va apparaître dans la boucle, car le flux de $\vec{B}$ va varier, puisque $\vec{B}$ varie proportionnellement à I.

4) On peut obtenir la valeur de la force électromotrice d'une part en appliquant la loi de Faraday : $\boxed{e = -\frac{d\phi}{dt}}$ et d'autre part en calculant la circulation du champ électromoteur $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ le long de la boucle conductrice.

On choisit une orientation de la boucle suivant $\vec{u_\theta}$, de sorte que le flux de $\vec{B}$ est positif si $I > 0$ (orientation du fil du solénoïde également suivant $\vec{u_\theta}$).

On a alors $\phi(\vec{B}) = \mu_0 n I \times \pi a^2$ et $\boxed{e = -\pi a^2 \mu_0 n \frac{dI}{dt}}$

Ou, par la seconde méthode : $\boxed{e = \oint -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl}}$,

soit $\boxed{e = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 n I a^2}{2r}\right) \times 2\pi r = -\pi a^2 n \frac{dI}{dt}}$.

Les deux méthodes donnent bien évidemment le même résultat.