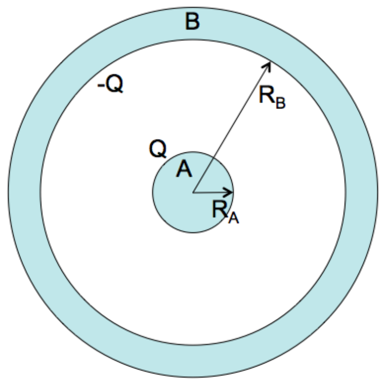
Master MEEF – Université Paris Diderot – Année 2017-2018

Exercices d'électromagnétisme

(Sélectionnés pour le cours de Physique par Étienne Parizot)

• Exercice 1 : Électrostatique : condensateur sphérique et énergie

Deux conducteurs sphériques concentriques, A et B, forment un condensateur, comme représenté sur la Figure . On note R_A le rayon extérieur du conducteur A et R_B le rayon intérieur du conducteur creux B. Le conducteur A porte la charge totale Q, et le conducteur B la charge totale $-Q$.



1) Justifier proprement, par exemple en utilisant le théorème de Gauss, que les charges soient réparties sur la surface externe de A et sur la surface interne de B.

2) Déterminer entièrement le champ électrostatique en tout point M de l'espace, en fonction de la distance r au centre du système. On justifiera proprement son orientation et son intensité, aussi bien dans les conducteurs qu'entre les armatures, et à l'extérieur du condensateur.

3) Déterminer la différence de potentiel $V_\mathrm{A} - V_\mathrm{B}$ entre les deux armatures.

4) Déterminer le coefficient de capacité, C, du condensateur sphérique ainsi formé.

5) Rappeler l'expression de la densité d'énergie en un point de l'espace où le champ électrique a pour intensité E.

6) Calculer l'énergie totale associée au champ électrique dans tout l'espace.

7) Exprimer cette énergie en fonction de Q et de C, d'une part, et en fonction de C et de $V_\mathrm{A} - V_\mathrm{B}$ d'autre part. Commenter.

• Exercice 2 : Condensateur cylindrique

On considère un condensateur cylindrique formé de deux armatures métalliques coaxiales, de rayons R_1 et R_2 (avec $R_1 < R_2$), et de hauteur h, supposée grande devant ces rayons. On négligera totalement les « effets de bord ». On note Q la charge de l'armature interne.

1) Déterminer le vecteur champ électrique en un point M situé à une distance r de l'axe ($R_1 < r < R_2$).

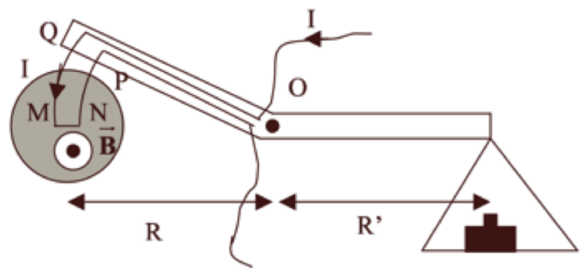
2) Déterminer la différence de potentiel entre les armatures, et en déduire la valeur de la capacité C du condensateur.

3) Effectuer l'application numérique, pour $R_1 = 10$ cm, $R_2 = 20$ cm, et $h = 50$ cm.

4) Que devient l'expression de C si $R_2 - R_1 = e \ll R_1$? Cela vous paraît-il cohérent avec la valeur de la capacité d'un condensateur plan ?

• Exercice 3 : Balance de Cotton

Une « balance de Cotton » est représentée sur la figure ci-dessous.



Les deux bras de la balance sont libres de tourner autour d'un axe perpendiculaire à la feuille, passant par O. Le bras de gauche sert de support à un fil conducteur dans lequel passe un courant $I = 5$ A. Les portions du circuit QM et NP sont des arcs de cercle rigides de centre O. La portion de circuit MN est rectiligne, de longueur $l = 2$ cm, et se trouve à une distance moyenne $R = 30$ cm de l'axe. Elle est placée dans une région où règne un champ magnétique uniforme, $\vec{B}$, perpendiculaire à la feuille (comme indiqué).

1) Déterminer la résultante de la force de Laplace s'exerçant sur la partie MN du circuit.

2) La force exercée sur les parties circulaires a-t-elle un effet sur l'équilibre de la balance ? Si oui, lequel ? Sinon, pourquoi ?

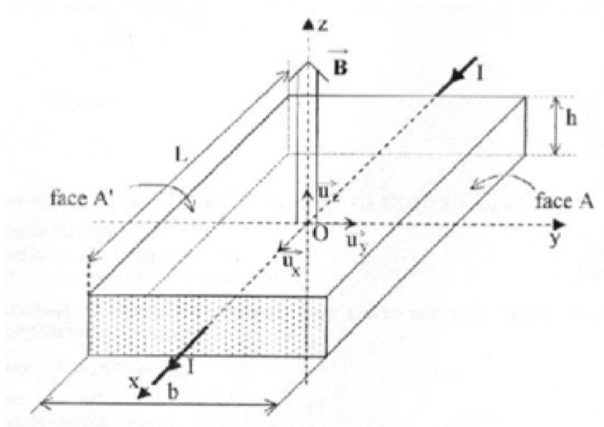
3) Pour équilibrer la balance en présence du champ magnétique, une masse m=2 g doit être ajoutée (par rapport à la situation sans champ magnétique) sur le plateau du bras de droite, situé à une distance $R' = 30$ cm. En déduire l'intensité du champ magnétique. Donner d'abord son expression analytique littérale.

• Exercice 4 : Effet Hall (d'après l'énoncé du CAPES 2006)

La figure ci-dessus représente une plaquette parallélépipédique de semi-conducteur dont les dimensions sont L=8.0 mm, $b = 5.0$ mm, et $h = 10\,\mu$m.

L'espace est rapporté à un repère cartésien $(\mathrm{O}, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$, comme indiqué. La plaquette est parcourue par un courant continu d'intensité I uniformément réparti avec la densité surfacique $\vec{j} = j\vec{u_x}$, avec $j > 0$. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme extérieur $\vec{B} = B\vec{u_z}$, avec $B > 0$ (voir figure). On négligera le champ magnétique créé par le courant I traversant la plaque.

1) Dans le matériau constituant la plaque semi-conductrice, les porteurs de charge ont une charge q, une masse m, et une densité volumique n. Exprimer la vitesse de ces porteurs de charge en fonction de $\vec{j}$, n et q.



2) Montrer qu'en présence du champ magnétique $\vec{B}$, il apparaît dans la plaquette un champ électrique, $\vec{E}$, dit « champ de Hall », tel que : $\vec{E} = -\frac{1}{nq}\vec{j} \wedge \vec{B}$. Indiquer brièvement, et qualitativement, pourquoi un tel champ apparaît.

3) Exprimer les composantes de $\vec{E}$ dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$.

4) Calculer la différence de potentiel de Hall, $U = V(\mathrm{A}') - V(\mathrm{A})$, qui apparaît entre les faces A et A$'$ de la plaquette. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme $U = kbI/h$ et exprimer la constante k en fonction de n et q.

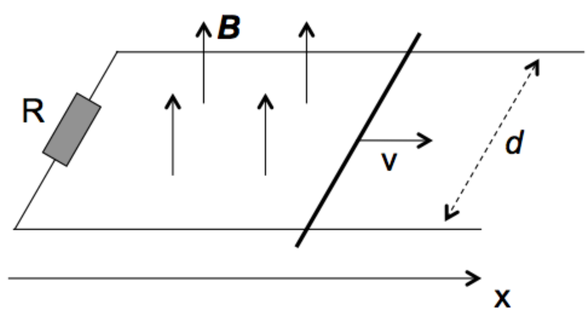
5) Justifier l'intérêt de l'effet Hall dans la mesure des valeurs des champs magnétiques.

6) Application numérique : $k = 3.0\,10^{-4}\,\mathrm{m}^3 C^{-1}$; $I = 0.20$ A ; calculer la sensibilité du capteur (U/B) ainsi que la densité volumique de porteurs libres n.

7) Quel est l'intérêt d'utiliser un semi-conducteur, plutôt qu'un conducteur ?

• Exercice 5 : Rails conducteurs et loi de Faraday

On considère un circuit constitué de deux rails rectilignes, parallèles et horizontaux, situés à une distance d l'un de l'autre, et de résistance électrique négligeable.
Ces rails sont reliés à l'une de leurs extrémités par une résistance R. Une barre parfaitement conductrice, de masse m, peut glisser sans frottement sur les deux rails. L'ensemble se trouve plongé dans un champ magnétique uniforme vertical, $\vec{B} = B\vec{u}_z$ (voir Figure 1, ci-dessous).



À l'instant $t = 0$, la barre placée en $x = 0$ est lancée à la vitesse $\dot{x}_0 = v_0$, puis elle est abandonnée à elle-même.

1) Justifier le fait qu'il apparaisse dans le circuit une force électromotrice, e, ainsi qu'un courant électrique, i.

2) Donner les expressions de e et de i, en précisant bien le sens du courant dans la barre. (NB : on négligera l'auto-induction du circuit.)

3) Exprimer la force exercée sur la barre. Rappeler la loi de Lenz, et dire si elle est vérifiée dans ce cas.

4) Écrire l'équation du mouvement de la barre et en déduire l'expression de la vitesse $v = \dot{x}$ en fonction du temps.

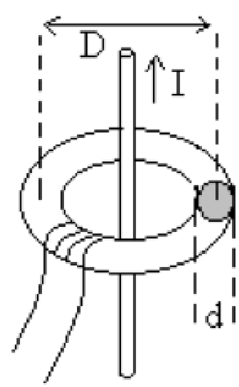
5) Expliciter la conservation de l'énergie, en disant ce que devient, finalement, l'énergie cinétique initiale de la barre.

• Exercice 6 : Pince ampèremétrique

Un fil rectiligne est parcouru par un courant alternatif sinusoïdal, d'intensité maximale I_0 et de fréquence ν. Le fil est supposé infini (c'est-à-dire qu'on néglige les "effets de bord").

1) Déterminer la direction et l'intensité du champ magnétique créé par ce courant en tout point de l'espace, en justifiant proprement la réponse.

On place autour de ce fil une bobine torique, constituée de $N = 100$ tours de fil de cuivre enroulés sur un tore dont l'axe coïncide avec le fil rectiligne, comme représenté sur la Figure . Le diamètre du tore est D, et la section circulaire interne du tore a pour diamètre d (voir figure). Pour simplifier, on suppose que $d \ll D$, de sorte que le champ magnétique créé par le fil rectiligne peut être considéré comme constant sur toute la section interne du tore. On notera s l'aire de cette section : $s = \pi d^2/4$.



2) Calculer le flux du champ $\vec{B}$ créé par le courant I à travers la bobine.

3) Déterminer le coefficient d'inductance mutuelle entre le fil et la bobine.

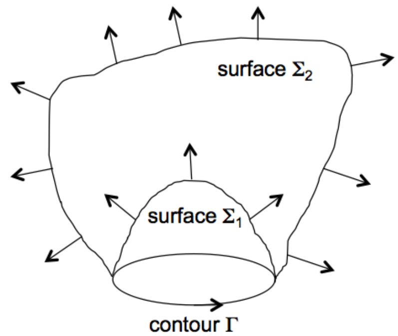
4) Indiquer pourquoi il apparaît, dans la bobine, une force électromotrice, e, et donner son expression analytique.

5) Calculer numériquement la force électromotrice e pour un courant d'intensité maximale $I_0 = 1000$ A, une fréquence $\nu = 50$ Hz, un diamètre $D = 10$ cm, et une section interne $s = 1\,\text{cm}^2$.

6) À quoi un tel montage peut-il servir ?

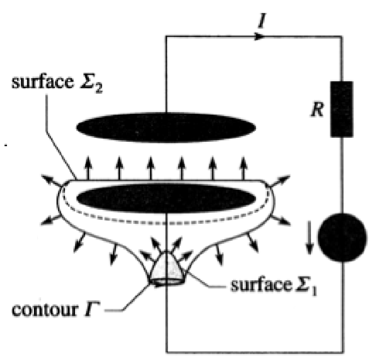
• Exercice 7 : Théorème d'Ampère généralisé

On considère de manière générale un contour (virtuel) orienté Γ, sur lequel s'appuient deux surfaces (virtuelles) Σ_1 et Σ_2, comme représenté sur la figure ci-dessous.



1) Que peut-on dire des flux Φ_1 et Φ_2 du champ magnétique $\vec{B}$ à travers les surfaces Σ_1 et Σ_2, orientées comme sur la figure ? Justifier précisément la réponse à partir des équations de Maxwell.

On considère à présent un condensateur plan, placé dans un circuit comprenant en outre un générateur de tension variable et une résistance électrique R, comme sur la figure ci-dessous.



On choisit un contour (virtuel) Γ entourant le fil reliant le générateur à l'une des plaques du condensateur, et on définit deux surfaces (virtuelles) s'appuyant sur ce contour, Σ_1, interceptant le fil conducteur, et Σ_2 passant entre les armatures du condensateur, sans couper de ligne de courant électrique.

2) Énoncer le théorème d'Ampère, en précisant l'équation de Maxwell dont il dérive (dite équation de Maxwell-Ampère).

3) Appliquer de deux manières le théorème d'Ampère au contour Γ, en utilisant la surface Σ_1 d'une part, et la surface Σ_2 d'autre part. Commenter.

4) En régime variable, l'équation de Maxwell-Ampère comporte un terme supplémentaire : lequel ?

5) Comment modifier le théorème d'Ampère pour tenir compte de ce terme ? (On parle de « théorème d'Ampère généralisé ».)

6) On suppose que le champ électrique créé par le circuit est négligeable sur l'ensemble des surfaces Σ_1 et Σ_2, sauf entre les armatures du condensateur, où il est quasi uniforme et a la même expression qu'en régime permanent. (On néglige les "effets de bord".)

6a) Rappeler la valeur de ce champ (même réponse qu'à la question 2 de l'exercice 4).

6b) Appliquer le théorème d'Ampère généralisé au coutour Γ et à la surface Σ_2. Commenter.

• Exercice 8 : Énergie magnétique et coefficient d'auto-induction

Un conducteur cylindrique **plein**, de rayon R_1, est parcouru par un courant I parallèle à son axe, réparti sur l'ensemble de sa section avec une densité uniforme. Ce courant "revient" par un cylindre de rayon $R_2 > R_1$, de même axe que le premier, et d'épaisseur négligeable.

1) Calculer le champ magnétique, $\vec{B}$, en chaque point de l'espace, en supposant le câble ainsi formé comme infiniment long, et en justifiant proprement la réponse.

2) En déduire l'énergie magnétique correspondant à une longueur l du câble.

3) En déduire le coefficient d'auto-induction (ou d'inductance propre) par unité de longueur du câble : $\lambda = L/l$.

• Exercice 9 : Onde électromagnétique

Une onde plane progressive, monochromatique, de fréquence ν, se propage dans le vide suivant l'axe Oz d'un trièdre (O, x, y, z), dans la direction des z croissants.

1) Dans cette question, on suppose que cette onde est polarisée rectilignement suivant l'axe Oy.

1a) Écrire l'expression du champ électrique de l'onde. On notera E_0 la valeur maximale que ce champ peut atteindre.

1b) Donner l'expression du champ magnétique associé.

1c) Donner l'expression du vecteur de Poynting associé.

2) On suppose maintenant que l'onde est de polarisation circulaire gauche.

2a) Écrire l'expression du champ électrique de l'onde. On notera E_0 la valeur maximale que ce champ peut atteindre.

2b) Donner l'expression du champ magnétique associé.

2c) Donner l'expression du vecteur de Poynting associé.

• Exercice 10 : Solénoïde infini et induction

Soit un solénoïde infini formé d'un enroulement circulaire contenant n spires par unité de longueur, parcouru par un courant I.

1) Rappeler la valeur du champ $\vec{B}$ créé par le solénoïde en tout point de l'espace.

2) Montrer que le potentiel vecteur est donné, à l'extérieur du solénoïde, par l'expression suivante : $\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 n I a^2/2r\, \vec{u}_\theta$, où a est le rayon du solénoïde.

3) On entoure le solénoïde d'une boucle conductrice, et l'on fait varier le courant I dans le solénoïde. Un courant apparaît-il dans la boucle ? Si oui, pourquoi ?

4) Déterminer la force électromotrice induite de deux façons différentes, à partir de la loi de Faraday, et à partir du champ électromoteur induit.

• Exercice 11 : Champ magnétique et inductance mutuelle

1) Fil "infini"

Soit un fil conducteur, rectiligne, orienté suivant l'axe (Oz), considéré comme infini et parcouru par un courant continu d'intensité I_1. (Voir le schéma de gauche sur la Figure 1.)

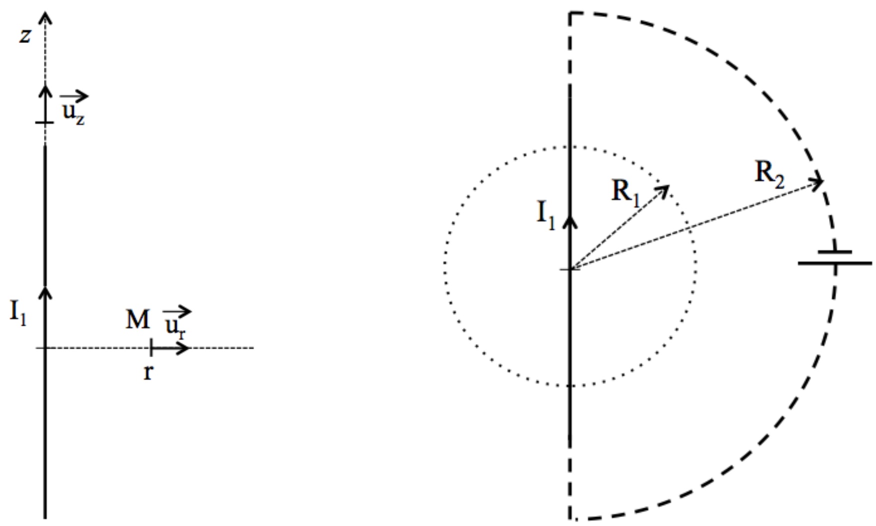


FIG. 1 – À gauche : fil infini parcouru par un courant I_1. À droite : fil "infini" réel, avec fermeture du circuit par un fil (en pointillé) à grande distance.

a) Rappeler la valeur (intensité et orientation) du champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le fil en tout point M de l'espace. Justifier brièvement la réponse.

b) En pratique, le fil rectiligne n'est pas infini, mais de longueur L, et le circuit est fermé par un fil en arc de cercle, de rayon R_2, représenté en pointillé sur le schéma de droite de la Figure 1. À quelle condition peut-on considérer que le champ magnétique créé dans une région proche du centre du fil rectiligne – disons à l'intérieur d'un rayon R_1 (voir la figure) –, reste en bonne approximation identique à celui déterminé à la question précédente ?

2) Bobine torique de section carrée

On considère maintenant une bobine torique de section carrée (voir le schéma sur la Figure 2 ci-dessous, où seule une moitié de cette bobine est représentée sur le schéma de gauche, et où la bobine complète est suggérée sur le schéma de droite). Cette bobine est constituée par un fil conducteur enroulé régulièrement sur le tore. La section carrée a un côté de longueur $2a$, et le tore a un rayon moyen R ($R > a$), de sorte que le rayon intérieur du tore vaut $r_{\text{min}} = R - a$, et le rayon extérieur $r_{\text{max}} = R + a$. Le fil, de résistance négligeable, est parcouru par un courant continu d'intensité I_2. Il y a au total N tours de fil répartis en rang serré sur le tore. L'axe du tore est noté Δ.

a) À partir des symétries du problème, déterminer l'orientation du champ magnétique $\vec{B}_2$ créé par la bobine en tout point de l'espace.

b) Appliquer le théorème d'Ampère et déterminer l'intensité de ce champ en tout point, en notant r la distance à l'axe Δ, et z l'altitude le long de l'axe Δ, repérée par rapport au plan médian de la bobine (correspondant à $z = 0$). On distinguera notamment les points situés à l'intérieur du tore, pour lesquels $-a \leq z \leq a$ et $R - a \leq r \leq R + a$, et les points situés à l'extérieur du tore.

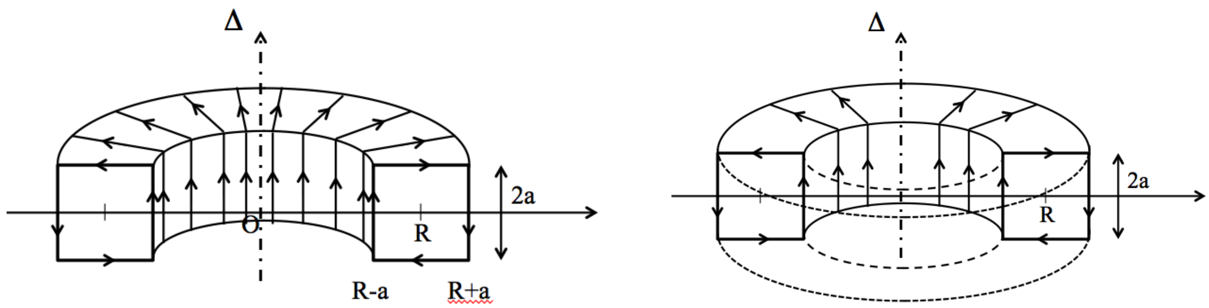


FIG. 2 – Schéma représentant la bobine torique de section carrée décrite dans l'énoncé (à gauche, une moitié seulement ; à droite, une suggestion de la bobine complète).

c) Calculer le flux du champ $\vec{B}_2$ à travers une spire de la bobine, puis à travers les N spires.

d) En déduire le coefficient d'auto-induction (ou inductance propre) de la bobine torique.

e) Effectuer l'application numérique, en prenant $R = 5$ cm, $a = 1$ cm et $N = 1000$. (On rappelle la valeur de $\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}$ S.I.)

3) Système de deux circuits sous influence mutuelle

On s'intéresse à présent à l'inductance mutuelle des deux circuits étudiés aux questions 1) et 2), disposés suivant la configuration de la Figure 3, c'est-à-dire avec le fil "infini" placé suivant l'axe de la bobine torique.

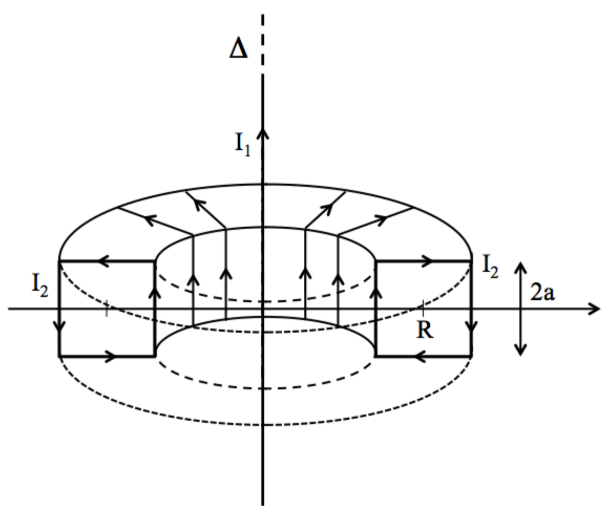


FIG. 3 – Schéma représentant la bobine torique de section carrée décrite dans l'énoncé (à gauche, une moitié seulement ; à droite, une suggestion de la bobine complète).

a) Calculer le flux du champ $\vec{B}_1$, créé par le fil "infini" (circuit 1, parcouru par le courant I_1), à travers la bobine (circuit 2).

b) Définir le coefficient d'inductance du circuit 1 à travers le circuit 2, qu'on notera M_{21}, et déduire sa valeur de la question précédente.

c) Effectuer l'application numérique (mêmes valeurs des paramètres que précédemment).

d) Calculer de même le flux du champ $\vec{B}_2$, créé par la bobine (circuit 2, parcouru par le courant I_2) à travers le circuit 1 (fil “infini”, avec retour du courant et fermeture du circuit loin de la région occupée par la bobine torique, comme dans la question 1).

e) En déduire la valeur du coefficient d'induction du circuit 2 à travers le circuit 1, qu'on notera M_{12}.

f) Conclusion, et généralisation.

• Exercice 12 : Induction et freinage

Une spire circulaire, de rayon a et de masse M, constituée d'un matériau conducteur de résistance totale R et de coefficient d'auto-induction négligeable, est suspendue sans frottement à un fil vertical isolant. Elle peut tourner sans résistance autour de cet axe (couple résistant à la torsion : $\vec{\Gamma}_{\text{fil}} = \vec{0}$). L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme horizontal, $\vec{B} = B_0\vec{u}_x$, orienté suivant l'axe (Ox).

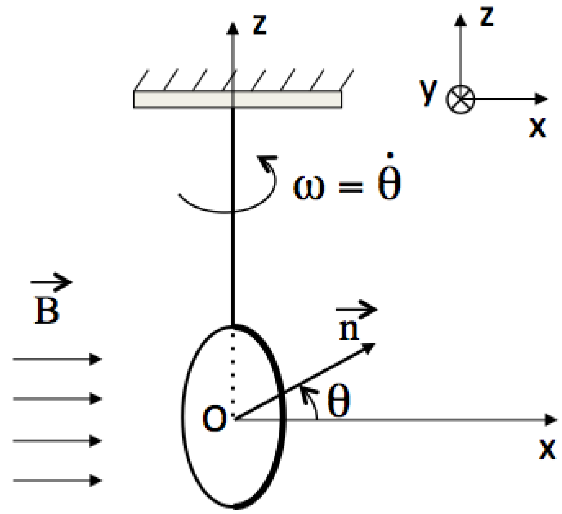


Fig. 4 – Spire de résistance R suspendue à un fil vertical, dans un champ magnétique uniforme horizontal. Son vecteur normal, noté $\vec{n}$, fait un angle θ avec la direction du champ magnétique.

On repère l'orientation de la spire par l'angle θ que fait son vecteur normal, $\vec{n}$, avec l'axe (Ox) (voir la figure 4).

1) Le choix du sens du vecteur normal $\vec{n}$ doit être fait en conformité avec le choix d'une orientation le long de la spire. Indiquer sur un schéma le sens positif correspondant.

2) Exprimer le flux du champ $\vec{B}$ à travers la spire lorsque celle-ci est orientée dans la direction d'angle θ.

3) Initialement, la spire est située dans le plan (yOz) : $\vec{n}$ est alors parallèle à (Ox), et $\theta = 0$. À l'instant $t = 0$, on lance la spire en rotation autour de l'axe (Oz) avec la vitesse angulaire $\dot{\theta}(0) = \omega_0$. Justifier qualitativement qu'il apparaisse alors un courant dans la spire.

4) Exprimer l'intensité du courant I dans la spire à un instant $t > 0$, en fonction de θ, $\dot{\theta}$ et des données du problèmes.

5) Préciser le sens du courant dans la spire, et vérifier qu'il est conforme à ce qui pouvait être attendu en vertu d'une loi générale que l'on explicitera.

6) La spire, parcourue par le courant I, constitue un dipôle magnétique. Exprimer son vecteur "moment dipolaire", $\vec{\mathcal{M}}$.

7) Donner l'expression du couple exercé par le champ $\vec{B}$ sur la spire (interaction champ/dipole). Vérifier qu'il induit un freinage.

8) Écrire l'équation du mouvement pour $t > 0$, et la mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta} = f(\theta)\dot{\theta}.$$

(On rappelle que le moment d'inertie d'un cercle uniforme de masse M et de rayon a autour d'un de ses diamètre vaut $J = \frac{1}{2}Ma^2$.)

9) Intégrer cette équation pour obtenir l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de θ. [NB : on pourra noter que $\sin^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$.]

10) Montrer que l'on peut déterminer la valeur finale de θ, lorsque la spire s'arrête, sans avoir à résoudre l'équation du mouvement et connaître la fonction $\theta(t)$.

11) Déterminer en fonction de ω_0, R, a et M, la valeur de B_0 pour laquelle la spire s'arrête au bout d'un quart de tour, c'est-à-dire lorsque $\theta = \pi/2$.

12) Effectuer l'application numérique, pour $M = 2$ g, $a = 5$ cm, $R = 0.04\,\Omega$, et $\omega_0 = 2\pi$ rad/s.

13) Calculer l'énergie dissipée par effet Joule dans la bobine au cours du processus, et la comparer à l'énergie cinétique initiale de la bobine. Commenter.