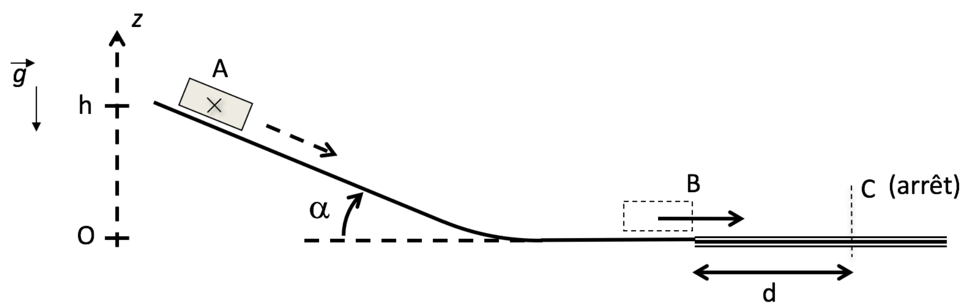
Master MEEF – Université Paris Diderot – 2017–2018

Contrôle Continu n°1 – Mécanique

• Exercice 1 : Arrêt d'un corps par frottement

Un corps de masse m se déplace sur une piste constituée d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, qui se raccorde à un plan horizontal, que l'on choisit comme origine des altitudes. Il règne un champ de pesanteur uniforme d'accélération $\vec{g}$ dirigée vers le bas. On note g sa norme.

Le corps est lâché sans vitesse initiale en un point A à une altitude h au dessus du plan horizontal. Il se déplace sans frottement jusqu'à un point B situé sur la partie horizontale, puis au-delà de B avec un coefficient de frottement dynamique μ.

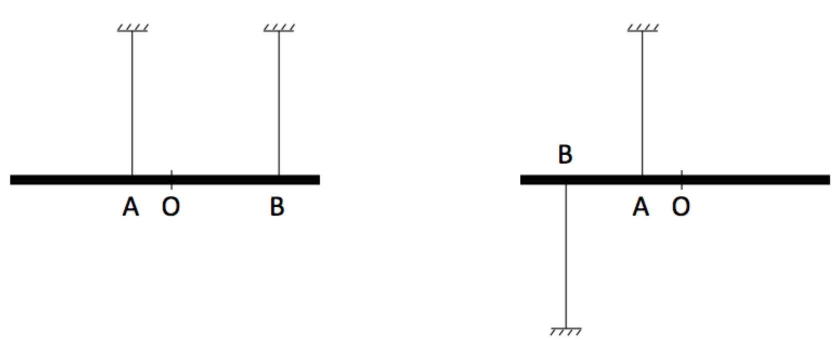


1) Déterminer la vitesse du corps au point B (à l'entrée de la partie avec frottements), en fonction des données du problème.

2) Déterminer la distance d (au-delà de B) au bout de laquelle le corps s'arrêtera.

• Exercice 2 : Équilibre à deux fils

Une barre homogène de longueur L et de masse M est suspendue horizontalement par deux fils verticaux. On considère deux configurations possibles pour l'équilibre de la barre, comme représenté ci-dessous. Le premier fil est fixé en A, à une distance r_{A} du milieu de la barre. Le second fil est fixé en B, à une distance r_{B} du milieu de la barre.



1) Déterminer la tension de chaque fil, pour l'équilibre correspondant à la figure de gauche.

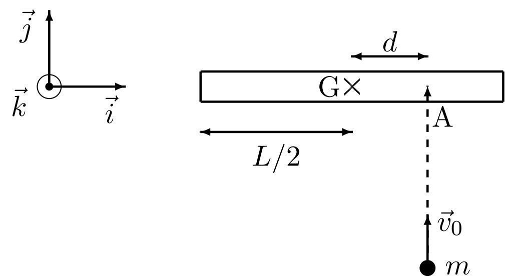
2) Déterminer la tension de chaque fil, pour l'équilibre correspondant à la figure de droite.

• Exercice 3 : Orientation d'un axe

Représenter un axe, de direction quelconque. Choisir un sens d'orientation de votre choix, et représenter le vecteur unitaire associé, ainsi que le sens positif correspondant pour les repérage des angles autour de cet axe.

• Exercice 4 : Impact d'un projectile sur une barre

Une barre homogène de longueur L, d'épaisseur négligeable et de masse M, est libre de se mouvoir sans frottement sur un support horizontal, considéré comme un référentiel galiléen, noté $\mathcal{R}$. Son centre de masse est noté G. On choisit un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que la barre soit initialement orientée selon l'axe $\vec{i}$ et tel que $\vec{k}$ soit orientée selon la verticale ascendante (perpendiculaire au plan de la feuille sur la figure ci-dessous, qui représente donc vue du dessus). Les coordonnées du point G sont initialement $(x_0, 0, 0)$, où x_0 est une abscisse arbitraire.



À l'instant $t = 0$, la barre reçoit l'impact d'un projectile de masse m et de vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{j}$, qui vient s'encastrer dans la barre en un point A, à une distance d du point G : $x_\mathrm{A} = x_0 + d$. (La longueur d est appelée « paramètre d'impact »).

On rappelle que le moment d'inertie d'une barre de longueur L autour d'un axe qui lui est perpendiculaire et qui passe par son centre vaut $I = \frac{1}{12}ML^2$.

A] Axe fixe

On suppose dans un premier temps que la barre est montée sur un axe de rotation vertical, Δ, passant par le point G et fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$. La barre est libre de tourner sans frottement autour de cet axe.

1) On considère le système global, comprenant à la fois la barre et le projectile. Montrer que le moment cinétique de ce système se conserve.

2) Déterminer la vitesse angulaire Ω de la barre après l'impact, en fonction du paramètre d'impact, d et des autres paramètres du problème.

B] Barre libre

La même expérience que précédemment est répétée, mais cette fois l'axe est retiré, de sorte que la barre est libre de se mouvoir sans entrave et sans frottement dans le plan $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. L'impact a lieu à nouveau à l'instant $t = 0$, et le projectile reste, cette fois encore, incrusté dans la barre.

3) Déterminer la position du nouveau centre de gravité du système, G$'$, immédiatement après l'impact du projectile.

4) Soit $\mathcal{R}'$ le référentiel du centre de masse, dans lequel on peut définir un repère immobile de centre G$'$ et d'axes parallèles à $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est-il galiléen ? Justifier.

5) Déterminer la vitesse vectorielle, $\vec{v}_{\mathrm{G}'}(t)$, pour $t \geq 0$.

6) Par un argument de conservation, déterminer le moment cinétique en G' de la barre, $\vec{\sigma}_{\mathrm{G}'}$, après l'impact. On fera intervenir la « masse réduite », $\mu = mM/(m+M)$.

7) Calculer explicitement le moment d'inertie, $I_{\mathrm{G}'}$, de la barre par rapport à l'axe $(\mathrm{G}', \vec{k})$, après l'impact (c'est-à-dire lorsque la barre est lestée par le projectile). Montrer qu'il peut se mettre sous la forme $I_{\mathrm{G}'} = \frac{1}{12}ML^2 + \mu d^2$.

8) Compte tenu des deux questions précédentes, déterminer dans $\mathcal{R}'$ la vitesse angulaire de rotation, Ω', de la barre autour de l'axe $(\mathrm{G}', \vec{k})$.

9) Décrire le mouvement complet de la barre après l'impact, comme la composition de deux mouvements. Commenter.

10) Calculer, dans $\mathcal{R}$, l'énergie cinétique totale du système après l'impact, $E_{\mathrm{c},1}$, et montrer qu'elle est toujours inférieure à l'énergie cinétique initiale, $E_{\mathrm{c},0}$. Où est passée la différence d'énergie, $\Delta E_{\mathrm{c}} = E_{\mathrm{c},0} - E_{\mathrm{c},1}$?

11) Pour quelle valeur du paramètre d'impact l'énergie dissipée est-elle maximale ? Que vaut-elle alors ?