

Correction de deux exercices d'électrocinétique

Exercice 7 : annulation d'un régime transitoire

- 1) Entre A et B, on a d'une part $U_{AB} = E$ (branche de gauche) et d'autre part $U_{AB} = R_1 i + L \frac{di}{dt}$ (branche de droite).

D'où $\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R_1}{L} i = \frac{E}{L}}$.

- 2) L'équation sans second membre a la solution générale suivante: $\frac{di}{dt} = -\frac{R_1}{L} i \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R_1}{L} dt$,
soit $i = i_0 e^{-\frac{R_1 t}{L}}$, où i_0 est une constante d'intégration.

L'équation avec second membre a une solution particulière évidente: $i = \frac{E}{R_1}$.

D'où finalement $i(t) = \frac{E}{R_1} + i_0 e^{-\frac{R_1 t}{L}}$.

Et puisque $i(0) = 0$, on doit avoir $i_0 = -\frac{E}{R_1}$,

de sorte que $\boxed{i(t) = \frac{E}{R_1} (1 - e^{-\frac{R_1 t}{L}})}$.

- 3) Le régime transitoire est la réponse du système à un changement des conditions qui lui sont imposées, comme ici la fermeture de l'interrupteur.

Le régime permanent est le régime asymptotique atteint longtemps après le changement de condition.

Ici, le régime transitoire correspond à la mise en place progressive du courant, depuis sa valeur initiale jusqu'à sa valeur asymptotique, $i(t) \rightarrow \frac{E}{R_1}$, $t \rightarrow \infty$.
 Le courant permanent n'est rien d'autre que cette valeur asymptotique : $i_{\text{perm.}} = \frac{E}{R_1}$,
 qui ne dépend pas du temps.

4) Par définition, on a $i_{\text{perm}} - i(t_0) = 0.01 i_{\text{perm}}$,
 soit $e^{-\frac{R_1 t_0}{L}} = 0.01$. D'où $t_0 = -\frac{L}{R_1} \ln 0.01$,
 ou encore $t_0 = \frac{L}{R_1} \ln 100$, soit $t_0 \approx 4.6 \frac{L}{R_1}$

5) La puissance délivrée par le générateur s'écrit $\mathcal{P}_g(t) = E \times i(t) = \frac{E^2}{R_1} (1 - e^{-\frac{R_1 t}{L}})$.
 D'où, en intégrant de 0 à t :

$$\mathcal{E}_g(t) = \int_0^t \mathcal{P}_g(t') dt' = \frac{E^2}{R_1} \left[t' + \frac{L}{R_1} e^{-\frac{R_1 t'}{L}} \right]_0^t$$

 soit $\mathcal{E}_g(t) = \frac{E^2}{R_1} \left(t + \frac{L}{R_1} (e^{-\frac{R_1 t}{L}} - 1) \right)$.

6) La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance s'écrit $\mathcal{P}_J = R_1 i^2(t) = \frac{E^2}{R_1} (1 - 2e^{-\frac{R_1 t}{L}} + e^{-\frac{2R_1 t}{L}})$.
 D'où $\mathcal{E}_J(t) = \int_0^t \mathcal{P}_J(t') dt' = \frac{E^2}{R_1} \left[t + 2 \frac{L}{R_1} (e^{-\frac{R_1 t}{L}} - 1) - \frac{L}{2R_1} (e^{-\frac{2R_1 t}{L}} - 1) \right]$.

7) On a ainsi $\mathcal{E}_g(t) - \mathcal{E}_J(t) = \frac{E^2}{R_1} \left[-\frac{L}{R_1} (e^{-\frac{R_1 t}{L}} - 1) + \frac{L}{2R_1} (e^{-\frac{2R_1 t}{L}} - 1) \right]$.
 D'où $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_g(t) - \mathcal{E}_J(t) = \frac{E^2}{R_1} \left(\frac{L}{R_1} - \frac{L}{2R_1} \right) = \frac{1}{2} L \frac{E^2}{R_1^2}$

8) On voit donc que la différence entre l'énergie fournie par le générateur et l'énergie dissipée par effet Joule, est égale, à l'issue du régime transitoire (qui, formellement, dure un temps infini, mais qu'on peut considérer achevée pour $t \gg \frac{L}{R_1}$, ou $t > t_0$) à $\frac{1}{2} L i_{\text{perm}}^2$.

Ceci n'est rien d'autre que l'énergie "emmagasinée" dans la bobine, conformément à ce qui pouvait être attendu sachant que l'énergie totale d'un système physique doit se conserver.

B) 9) Dans la branche où circule i_1 , on $U_{AB}(t) = R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt}$.
 Dans la branche où circule i_2 , on a $U_{AB}(t) = \frac{q}{C} + R_2 i_2$,
 où q est la charge sur l'armature supérieure du condensateur, telle que $i_2 = \frac{dq}{dt}$.

Par ailleurs, bien sûr $U_{AB} = E$.

On a donc d'une part $E = R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt}$, d'où

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1 t}{L}} \right).$$

et d'autre part $E = \frac{q}{C} + R_2 \frac{dq}{dt}$, d'où, par analogie avec la résolution de l'équation portant sur i_1 , c'est-à-dire en remplaçant i_1 par q , R_1 par $\frac{1}{C}$, et L par R_2 :

$$q(t) = EC \left(1 - e^{-\frac{t}{R_2 C}} \right) \quad (\text{NB: } q(0) = 0, \text{ comme } i_1(0) = 0).$$

$$\text{D'où } i_2(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 C}}.$$

Finalement,
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{E}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1 t}{L}} \right) + \frac{E}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

10) D'après l'expression précédente, si $R_1 = R_2$, on a

$$i(t) = \frac{E}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1 t}{L}} + e^{-\frac{t}{R_2 C}} \right), \quad \text{et si on a encore } \frac{R_1}{L} = \frac{1}{R_2 C},$$

$i(t) = \frac{E}{R_1}$, $\forall t$. Les conditions d'annulation du régime transitoire sont donc :

$$\boxed{R_2 = R_1} \quad \text{et} \quad \boxed{C = \frac{L}{R_1^2}}.$$

c) 11) Pour la branche (R_1, L) , on a $\boxed{Z_1 = R_1 + jL\omega}$.

Pour la branche (C, R_2) , $\boxed{Z_2 = R_2 - \frac{j}{C\omega}}$.

12) Pour que le courant i soit en phase avec la tension, il faut que l'impédance complexe équivalente du circuit soit réelle (et n'introduise donc aucun déphasage).

Dans le circuit Z_1 et Z_2 sont en parallèle, d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{eq}} &= \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_1 + jL\omega} + \frac{C\omega}{R_2 C\omega - j} \\ &= \frac{R_1 - jL\omega}{R_1^2 + L^2\omega^2} + \frac{R_2 C^2 \omega^2 + jC\omega}{R_2^2 C^2 \omega^2 + 1} = A + j \left(\frac{C\omega}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2} - \frac{L\omega}{R_1^2 + L^2 \omega^2} \right) \end{aligned}$$

où A est un nombre réel.

La condition $Z_{eq} \in \mathbb{R}$ (ou de façon équivalente $\frac{1}{Z_{eq}} \in \mathbb{R}$) s'écrit donc :

$$\frac{C\omega}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2} - \frac{L\omega}{R_1^2 + L^2 \omega^2} = 0,$$

$$\text{d'où } R_1^2 C\omega + L^2 C\omega^3 = L\omega + R_2^2 C^2 L\omega^3 \Leftrightarrow R_1^2 C - L = L(R_2^2 C - L)\omega^2,$$

Ceci doit être nul pour toute valeur de ω . Or le premier membre ne dépend pas de ω . Le second ne doit donc pas

en dépendre non plus ; d'où $R_2^2 C - L = 0$. Mais alors le 1^{er} membre doit lui aussi être égal à zéro. D'où $R_1^2 C - L = 0$

En comparant ces deux conditions, on voit que;

$$\boxed{R_1 = R_2} \text{ et } \boxed{R_1^2 C = L}$$

13) Ce sont les mêmes conditions que celles obtenues dans la partie A pour annuler le régime transitoire.

La valeur du courant $i(t)$ correspondant est obtenue en représentation complexe en écrivant que $\underline{i(t)} = \frac{u(t)}{\underline{Z_{eq}}}$,

Or, si $R_2 = R_1$ et $R_1^2 C = L$, l'expression de $\frac{1}{\underline{Z_{eq}}}$ calculée à la question 12) devient:

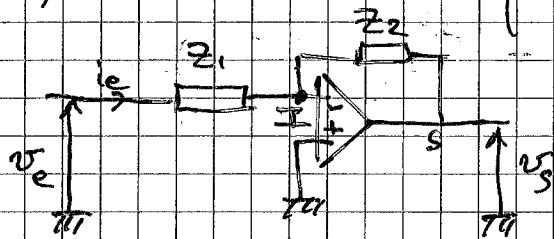
$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z_{eq}}} &= A = \frac{R_1}{R_1^2 + L^2 \omega^2} + \frac{R_1 C^2 \omega^2}{1 + R_1^2 C \omega^2} \quad (\text{on sait déjà que la partie imaginaire est nulle}) \\ &= \frac{1}{R_1 \cdot (1 + \frac{L^2}{R_1^2} \omega^2)} + \frac{R_1 C^2 \omega^2}{1 + \frac{L^2}{R_1^2} \omega^2} \\ &= \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{1 + \frac{L^2}{R_1^2} \omega^2} + \frac{R_1^2 C^2 \omega^2}{1 + \frac{L^2}{R_1^2} \omega^2} \right) = \frac{1}{R_1} \left(\frac{1 + \frac{L^2 \omega^2}{R_1^2}}{1 + \frac{L^2 \omega^2}{R_1^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \underline{Z_{eq}} = R_1 \text{ et } \boxed{i(t) = \frac{u(t)}{R_1}}$$

Tout se passe donc comme s'il n'y avait dans le circuit qu'une branche, avec la seule résistance R_1 .

Exercice 11 : filtre actif à amplificateur opérationnel

FIJ 1) le schéma est équivalent à :



$$\text{, où } \underline{Z}_2 = R_2$$

$$\text{et } \underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}$$

Puisque l'amplificateur opérationnel est parfait,
 on a $V_+ - V_- = 0$, et $i_- = 0$. Donc le point I,
 correspondant à la borne d'entrée "-", est au potentiel
 nul, et le courant passant dans la branche $\underline{Z}_2$
 est identique au courant i_e .

$$\text{On a ainsi } \underline{v_e} = \underline{Z}_1 i_e, \text{ et } \underline{v_s} = V_s - V_I = -\underline{Z}_2 i_e.$$

$$\text{D'où la fonction de transfert } \underline{H} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}.$$

En remplaçant par les expressions ci-dessus, on obtient:

$$\underline{H} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{1}{jR_1C_1\omega}} = -j \frac{R_2}{R_1} \frac{R_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}$$

En posant $H_0 = \frac{R_2}{R_1}$ et $\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$, on trouve bien la
 forme annoncée: $\underline{H} = -jH_0 \frac{\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_1}$

$$2) \text{ On a } \underline{G(\omega)} = |\underline{H}(\omega)| = H_0 \frac{\omega/\omega_1}{\sqrt{1 + \omega^2/\omega_1^2}}$$

Pour $\omega \gg \omega_1$, on a $1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \approx \frac{\omega^2}{\omega_1^2}$, d'où $\underline{G(\omega)} \approx H_0$

Pour $\omega \ll \omega_1$, $1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \approx 1$, et $\underline{G(\omega)} \approx H_0 \frac{\omega}{\omega_1}$

3) Le gain maximal est $G_{\max} = H_0 = \frac{R_2}{R_1}$.

Il est atteint (asymptotiquement) dans la limite des hautes fréquences, c'est-à-dire pour $\omega \gg \omega_1$.

On a donc
$$G(\omega) = G_{\max} \frac{\omega/\omega_1}{\sqrt{1 + \omega^2/\omega_1^2}}$$

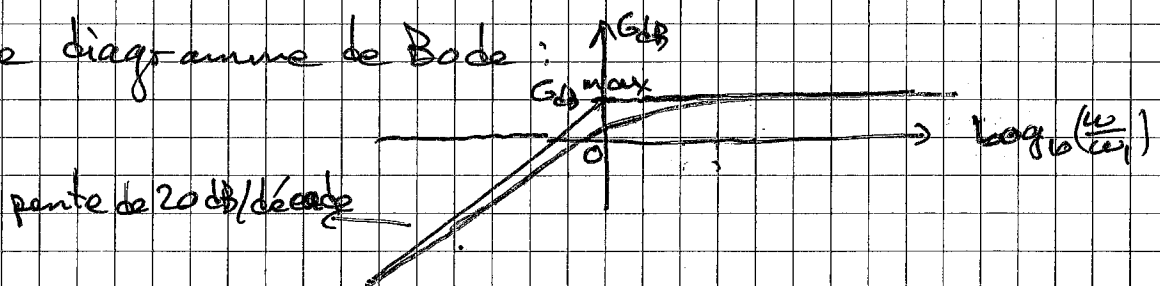
4) D'après l'expression de $G(\omega)$, il est clair que $G(\omega_1) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$

La pulsation de coupure est donc
$$\omega_c = \omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$$

5) Pour $\frac{\omega}{\omega_1} \gg 1$, $G_{dB} = 20 \log_{10} G(\omega) \approx 20 \log_{10} G_{\max}$

Pour $\frac{\omega}{\omega_1} \ll 1$, $G_{dB} \approx 20 \log_{10} G_{\max} + 20 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_1}$

D'où le diagramme de Bode :



6) Il s'agit d'un filtre passe haut.

B] Le schéma général est le même que celui représenté plus haut, mais cette fois $\underline{Z}_1 = R_1$ et $\underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + jC_2\omega}$

7) Donc $\underline{H} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega}$, que l'on

peut écrire
$$\underline{H} = \frac{-H_0}{1 + j\omega/\omega_c}$$
, où
$$\omega_c = \frac{1}{R_2 C_2}$$

D'où

$$G(\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \omega^2/\omega_c^2}}$$

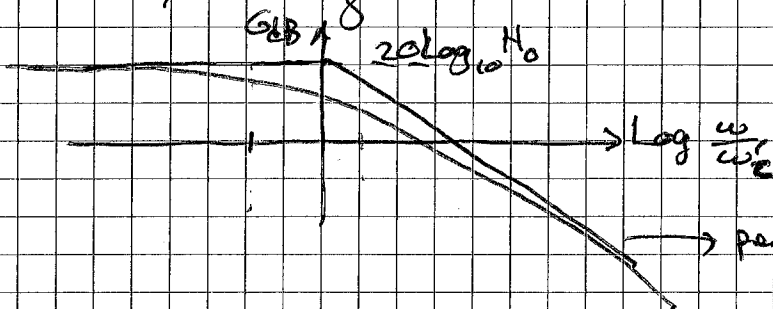
8) Il est alors évident que $G'_{\max} = H_0 = G_{\max}$.

Pour $\underline{\omega} \gg \omega_2$, on a $G'(\omega) \approx \frac{H_0}{\omega/\omega_2}$.

Pour $\underline{\omega} \ll \omega_2$, $G'(\omega) \approx H_0$.

9) La pulsation ω'_c , pour laquelle $G'(\omega'_c) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$, est simplement $\omega'_c = \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$.

10) Le diagramme de Bode correspondant a l'allure suivante:



$$\omega \gg \omega'_c : G_{dB} = 20 \log_{10} H_0 - 20 \log_{10} \frac{\omega}{\omega'_c}$$

$$\omega \ll \omega'_c : G_{dB} = 20 \log_{10} H_0$$

→ pente: -20 dB/décade

11) Il s'agit d'un filtre passe bas.

c) Le schéma générique est à nouveau le même, avec cette fois $Z_1 = R_1 + \frac{1}{jC_1 \omega}$ et $Z_2 = \frac{R_2}{1 + jR_2 C_2 \omega}$.

$$12) \text{ On a donc } \underline{f''}(\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{jR_1 C_1 \omega}{(1 + jR_1 C_1 \omega)(1 + jR_2 C_2 \omega)}$$

Avec les notations introduites plus haut, on peut donc écrire:

$$\underline{f''}(\omega) = -G_{\max} \frac{j\omega/\omega_c}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_c})(1 + j\frac{\omega}{\omega'_c})}$$

13) Par hypothèse $\omega_c \ll \omega'_c$. On peut donc considérer trois régimes asymptotiques: $\omega \ll \omega_c$, $\omega_c \ll \omega \ll \omega'_c$, et $\omega \gg \omega'_c$.

Les comportements correspondants sont les suivants :

$$G''(\omega) = G_{\max} \frac{\omega/\omega_c}{\sqrt{1 + \omega^2/\omega_c^2} \sqrt{1 + \omega^2/\omega_c'^2}}, \quad \text{d'où :}$$

$$\omega \ll \omega_c \ll \omega_c' : \quad G''(\omega) \approx G_{\max} \times \frac{\omega}{\omega_c}$$

$$\omega_c \ll \omega \ll \omega_c' : \quad G''(\omega) \approx G_{\max}$$

$$\omega_c \ll \omega_c' \ll \omega : \quad G''(\omega) \approx G_{\max} \times \frac{1}{\omega/\omega_c}$$

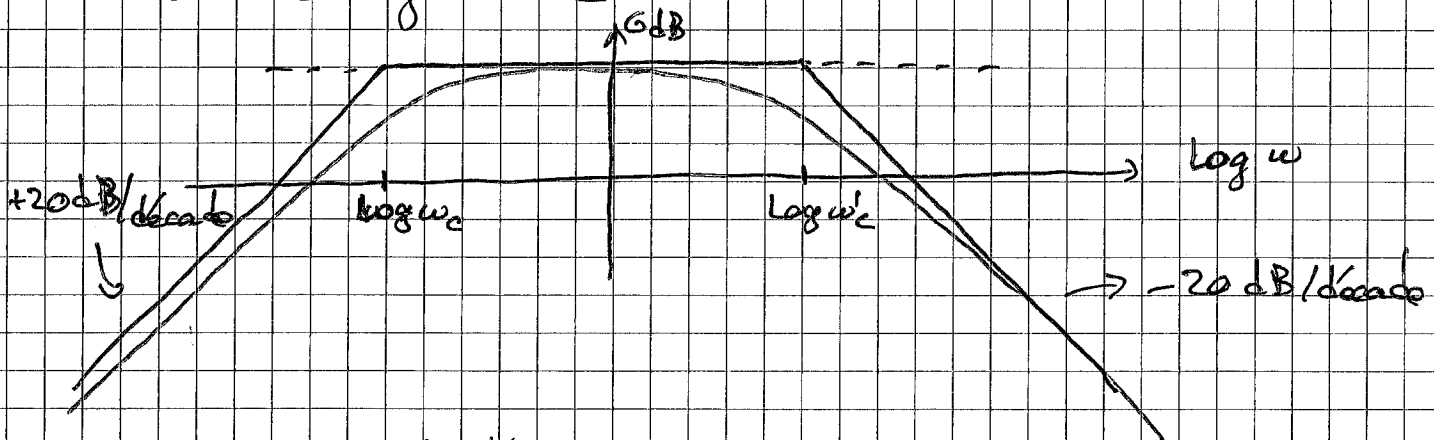
14) Ces comportements asymptotiques se traduisent, pour G_{dB} ,

$$\text{en : } \omega \ll \omega_c : \quad G_{dB} \approx 20 \log G_{\max} + 20 \log \frac{\omega}{\omega_c}$$

$$\omega_c \ll \omega \ll \omega_c' : \quad G_{dB} \approx 20 \log G_{\max}$$

$$\omega \gg \omega_c' : \quad G_{dB} \approx 20 \log G_{\max} - 20 \log \frac{\omega}{\omega_c'}$$

D'où le diagramme de Bode :



15) Il s'agit d'un filtre passe bande.