Chapitre III

Systèmes de points matériels

I Systèmes de points matériels et centre d'inertie

I-1 Paradigme mécaniste et réductionnisme

Dans le contexte de la Physique, un paradigme est un système de pensée, un cadre général de représentation du monde, offrant une grille de lecture particulière de la réalité.

L'évolution culturelle de l'humanité a conduit à divers « changements de paradigme » au cours de l'Histoire, et différents paradigmes existent au même moment sur la planète, y compris au sein d'une même civilisation et d'une même société. Dans un contexte scientifique, les philosophes parlent souvent de « nouveau paradigme » pour désigner le cadre de représentation du monde physique né des révolutions relativiste et quantique initiées au début du XXe siècle. Ce paradigme dépasse et, dans une large mesure, remplace le paradigme de la Physique Classique, adopté dans l'ensemble de ce cours.

Le paradigme général de la Physique Classique est un paradigme mécaniste (cf. Chap. I), basé sur l'idée que le monde physique se réduit à un ensemble de corps matériels objectifs, disposés dans l'espace et le temps suivant des lois universelles, répondant à un déterminisme causal absolu. À ce paradigme se trouve associée le principe fondamental appelé *réductionnisme*, indiquant que les propriétés des corps physiques étendus dépendent entièrement et exclusivement des propriétés de leurs constituants, et que la décomposition des corps étendus en constituants plus petits peut être poursuivie en principe jusqu'à des corpuscules conçus comme *élémentaires*, c'est-à-dire non décomposables eux-mêmes en corps physiques plus petits dont ils tireraient leurs propriétés.

La question spécifique de l'existence d'« atomes » véritablement insécables, qui seraient les constituants ultimes de la réalité matérielle, mais qui seraient néanmoins *étendus*, n'est pas tranchée en Physique Classique. C'est une question particulièrement épineuse, que les Grecs avaient d'ailleurs médité en profondeur dès leurs premières réflexions sur la matière, mais il se trouve que la Physique Classique n'a pas véritablement besoin d'y répondre pour rendre opérationnel son arsenal technique et conceptuel. En fait, le formalisme de la Mécanique Classique peut s'affranchir de la question des corpuscules élémentaires en poussant le réductionnisme à l'infini – et d'un certain point de vue, jusqu'à l'absurde –, jusqu'au « point matériel », notion centrale qui réfère à un corps physique considéré comme idéalement ponctuel (au sens de la géométrie ordinaire).

Le paradigme mécaniste réductionniste peut ainsi s'énoncer de la manière suivante : *tout corps étendu est composé de corpuscules ponctuels dont les propriétés mécaniques propres et les interactions déterminent entièrement le comportement physique.*

Dans ce contexte, la notion de corps physique *solide* s'établit comme une unité matérielle idéalisée présentant une extension intrinsèque invariable, c'est-à-dire dont la distance entre deux constituants quelconques demeure constante. À un niveau plus fondamental, toutefois, ce sont les corpuscules élémentaires (les *points matériels*) qui composent les corps qui sont directement soumis aux lois de la Physique, et les forces s'exerçant entre les corps macroscopiques ne sont que des forces globales qui sont la résultante des forces individuelles agissant à l'échelle des points matériels.

Par exemple, la force de gravitation exercée par la Terre sur une pomme est en fait la résultante des forces d'attraction universelles exercées par chacun des constituants de la Terre sur chacun des constituants de la pomme. Il est tout à fait remarquable que le bilan de cette superposition gigantesque[1] d'attractions individuelles conduise à une expression aussi simple que

$$\vec{F} = -G\,\frac{M_{\text{Terre}} M_{\text{Pomme}}}{r^2}\,\vec{u}_{TP}, \tag{III.1}$$

avec des notations naturelles (et dans la limite d'une symétrie sphérique parfaite, avec une pomme de dimension négligeable...).

Nous l'établirons explicitement dans un chapitre ultérieur.

I-2 Dynamique des corps macroscopiques

En principe, dans le cadre du paradigme adopté, le mouvement des corps macroscopiques peut toujours se déduire de la connaissance des forces s'exerçant à l'échelle des corpuscules élémentaires et de l'application des lois de la dynamique à chacun de ces corpuscules. En pratique, bien sûr, le nombre gigantesque de constituants des corps macroscopiques rend impossible la mise en œuvre d'un tel programme. Il s'avère, toutefois, que les forces de liaison entre les constituants des corps appelés ordinairement « solides » sont beaucoup plus intenses que les forces exercées sur eux par des éléments extérieurs. Ces forces internes représentent donc pour ces corps des *forces de cohésion* intenses, qui permettent, en très bonne approximation, de considérer les corps macroscopiques comme des entités constituées indéformables, rigides (i.e. « solides » au sens technique du terme), évoluant de manière cohérente à travers l'espace. Les forces internes sont responsable de la *forme* du corps, maintenant ses constituants les uns par rapport aux autres dans un rapport géométrique immuable, indépendamment des forces exercées de l'extérieur – tout comme deux morceaux de bois collés fortement l'un à l'autre peuvent être aisément déplacés ou tournés *ensemble* au sein de leur environnement, sans que soient affectées leurs relations spatiales mutuelles.

L'enseignement scolaire de la Physique reproduit généralement l'évolution historique des idées sur le monde mécanique, en ce sens qu'il énonce et applique les lois élémentaires de la dynamique directement aux corps macroscopiques. Or il n'y a rien d'évident à ce que la conjonction et la conjugaison d'actions microscopiques innombrables entre constituants de nature diverse conduisent *in fine* à une loi dynamique valable pour les corps macroscopiques, qui garde non seulement la même simplicité que la loi fondamentale, mais encore la même forme – celle de la relation fondamentale de la dynamique !

Nous l'avons implicitement supposé dans les chapitres précédents, par exemple en déterminant le mouvement d'une pomme dans un champ de pesanteur ou d'un corps attaché à un ressort, calculant des mouvements et des trajectoires en réponse à des forces s'appliquant au corps dans son ensemble, sans autre précision. Mais on ne saurait se satisfaire d'une telle hypothèse, ni même du simple constat de sa validité manifeste, et une véritable compréhension du monde mécanique devrait permettre, au moins en principe, de justifier rigoureusement un tel comportement à l'échelle macroscopique.

Pour obtenir une telle justification, nous devons partir des lois fondamentales et de leurs conséquences sur le mouvement des corpuscules élémentaires auxquels elles s'appliquent en propre. Selon l'idée même du réductionnisme, c'est du mouvement individuel des constituants que nous devons déduire les lois relatives au système composé.

Dans ce chapitre, nous étudions la dynamique des systèmes de points matériels – pas nécessairement liés de manière rigide les uns aux autres – et préparons l'étude du mouvement des corps solides macroscopiques, qui sera développée au chapitre suivant.

I-3 Centre de masse d'un système de points matériels

La notion de « centre de masse » joue un rôle très important en Mécanique, comme nous le découvrirons progressivement. Commençons par en donner une définition :

Définition III.1 *On appelle « centre de masse » d'un système de points matériels le barycentre géométrique de ces points, affectés d'un coefficient qui n'est rien d'autre que leur masse.*

[1] voire infinie, dans une description continue

Il s'agit donc d'une *moyenne pondérée* des positions des différents points matériels constituant le système. Tout étudiant sait établir la moyenne de ses notes, en tenant compte de leurs coefficients respectifs, de sorte que la notion de centre de masse ne pose généralement pas de problème de principe. Il est toutefois utile de garder à l'esprit les deux relations mathématiques équivalentes qui traduisent directement sa définition, l'une intrinsèque au système de points considéré, et l'autre faisant intervenir un point extérieur quelconque (par exemple l'origine d'un repère).

Illustrons d'abord la situation dans le cas d'un système formé par deux corps, de masses m_1 et m_2, situés respectivement aux points M_1 et M_2. La position du centre de masse, noté G, est donnée par :

$$\vec{\mathrm{OG}} = \frac{m_1\vec{\mathrm{OM}}_1 + m_2\vec{\mathrm{OM}}_2}{m_1 + m_2}, \tag{III.2}$$

ou encore, bien sûr :

$$(m_1 + m_2)\vec{\mathrm{OG}} = m_1\vec{\mathrm{OM}}_1 + m_2\vec{\mathrm{OM}}_2, \tag{III.3}$$

où O est généralement le centre du repère utilisé pour spécifier les positions dans le référentiel considéré, mais peut en réalité être remplacé par n'importe quel autre point. En effet, en introduisant un point A quelconque dans les trois vecteurs ci-dessus, c'est-à-dire en écrivant $\vec{\mathrm{OG}} = \vec{\mathrm{OA}} + \vec{\mathrm{AG}}$, et de même $\vec{\mathrm{OM}}_i = \vec{\mathrm{OA}} + \vec{\mathrm{AM}}_i$ (pour $i = 1$ ou 2), on obtient immédiatement, après simplification :

$$(m_1 + m_2)\vec{\mathrm{AG}} = m_1\vec{\mathrm{AM}}_1 + m_2\vec{\mathrm{AM}}_2.$$

Le cas particulier où le point A, que l'on peut choisir à notre guise, est simplement le point G, fournit la seconde relation utile :

$$m_1\vec{\mathrm{GM}}_1 + m_2\vec{\mathrm{GM}}_2 = \vec{0}, \tag{III.4}$$

où aucune référence n'est faite à un point extérieur (relation intrinsèque). On peut encore écrire :

$$\vec{\mathrm{GM}}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{\mathrm{GM}}_2, \tag{III.5}$$

où il apparaît clairement que le centre de masse d'un système de deux points matériels se situe toujours :

1. sur la droite reliant les deux points,
2. entre ces deux points,
3. décalé vers le plus lourd des deux.

La première propriété est évidente, puisque l'expression (III.5) montre que les vecteurs $\vec{\mathrm{GM}}_1$ et $\vec{\mathrm{GM}}_2$ sont colinéaires. La seconde ne l'est pas moins, puisque le rapport des masses est positif, et donc $\vec{\mathrm{GM}}_1$ pointe dans la direction opposée à $\vec{\mathrm{GM}}_2$. Quant à la troisième, elle se déduit du fait que le rapport des normes de $\vec{\mathrm{GM}}_1$ et $\vec{\mathrm{GM}}_2$ est inversement proportionnel au rapport des masses, toujours en vertu de l'expression (III.5).

Ces expressions se généralisent aisément à un nombre n quelconque de points matériels, de masse m_i et situés respectivement aux points M_i. En notant M la masse totale du système, le centre de masse, G, est donné par :

$$M\,\vec{\mathrm{OG}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{\mathrm{OM}}_i, \quad \text{avec} \quad M = \sum_{i=1}^{n} m_i, \tag{III.6}$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{\mathrm{GM}}_i = \vec{0}. \tag{III.7}$$

Le centre de masse porte bien son nom : il représente le "milieu" géométrique des masses, puisqu'il correspond à une moyenne de la position de tous les points matériels, chacun étant pondéré par sa masse.

Le fait que le coefficient de pondération soit ici tout simplement la masse nous invite à remarquer, à toutes fins utiles, qu'une « pondération par la masse » devrait résonner à toute oreille sensible à l'étymologie comme un pléonasme. La notion de centre de masse est en fait à l'origine de toutes les réflexions sur la notion de moyenne *pondérée*, du latin *pondus, ponderis*, qui signifie justement... « poids » ! Difficile de ne pas noter, de même, que la notion mathématique de barycentre renvoie, elle aussi, à la racine *bary-*, provenant du grec « barus », qui signifie lourd, et réfère donc directement à la masse des corps.

[Une dernière remarque permet peut-être de préciser la notion de “quantité de matière”, dont nous avons dit au chapitre I qu’elle était l’essence de la notion de masse : le centre de masse apparaît en fait véritablement comme le centre géométrique de toutes les masses, sans coefficient de pondération, si l’on convient qu’il est équivalent de dire qu’un point matériel de masse $2m$ est en fait la superposition (au même point) de deux points matériels de masse m. Dans ce cas, le centre de masse se calcule comme le barycentre de tous les points-matériels-unités constituant le système, affectés d’un coefficient 1 (c’est-à-dire sans pondération particulière), en comptant, en chaque point, autant de points matériels qu’il y a d’unités de masse...]

Nous verrons dans ce chapitre et les suivants à quel point cette notion de centre de masse est fructueuse et pertinente pour l’étude des corps macroscopiques et des systèmes de corps en général. Il est important de réaliser, toutefois, que ce point géométrique ne correspond à aucune réalité matérielle explicite. Nous l’avons défini mathématiquement comme le barycentre des points matériels constituant le système, mais lui-même n’a pas de support matériel. Il *résume*, d’un certain point de vue, l’ensemble du système, et il peut être déterminé de manière explicite et univoque dès lors que la position de chaque point du système est connue. Mais on ne saurait le localiser physiquement par lui-même. Insistons-y une dernière fois : il n’y a *rien* au centre de masse, mais c’est néanmoins « le » centre de masse du système, défini très précisément et sans la moindre ambiguïté, qui jouit, nous le verrons en détail, de propriétés remarquables et particulièrement utiles.

Notons enfin que les relations ci-dessus caractérisant la position du centre de masse sont des relations vectorielles dans l’espace géométrique à 3D, et consistent donc en fait en trois égalités distinctes. Ce sont les *vecteurs* du membre de droite et du membre de gauche qui sont égaux, et par conséquent leurs trois coordonnées dans un repère quelconque sont elles aussi respectivement égales. Ainsi, dans le cas particulier d’un repérage par coordonnées cartésiennes où les points M_i ont pour coordonnées x_i, y_i et z_i, on a conjointement :

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i, \quad y_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\, z_i \tag{III.8}$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{\mathrm{G}}) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i - y_{\mathrm{G}}) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i(z_i - z_{\mathrm{G}}) = 0. \tag{III.9}$$

Chaque coordonnée du centre de masse est la moyenne pondérée des coordonnées correspondantes des différents points du système.

I-4 Quantité de mouvement d’un système de points

Une première propriété remarquable du centre de masse est obtenue par le calcul de la quantité de mouvement totale, $\vec{p}_{\mathrm{tot}}$, d’un système de n points matériels (M_i, m_i). Par quantité de mouvement totale, on entend simplement la somme des quantités de mouvement individuelles des différents points. Il suffit de développer ce calcul (en utilisant la relation III.6) :

$$\vec{p}_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{OM}}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sum_i m_i \vec{\mathrm{OM}}_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\,\vec{\mathrm{OG}}) = M\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{OG}}}{\mathrm{d}t}, \tag{III.10}$$

où $M = \sum_i m_i$ est, comme précédemment, la masse totale du système. On a donc finalement :

$$\vec{p}_{\mathrm{tot}} = M\,\vec{v}_{\mathrm{G}}, \tag{III.11}$$

où la vitesse du point G, $\vec{v}_{\mathrm{G}}$ est simplement la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\vec{\mathrm{OG}}$. Il est important de noter que cette vitesse ne correspond pas, *a priori*, à la vitesse d’un point matériel du système. Mais la position du centre de masse, G, étant parfaitement définie à chaque instant (barycentre du système), il est aisé de considérer son mouvement au cours du temps, comme si un corps s’y trouvait localisé, et de définir sa vitesse comme pour tout autre point susceptible de se déplacer dans l’espace. Le centre de masse, G, est donc un point sans support matériel, mais dont la vitesse est parfaitement définie.

Le simple calcul précédent établit ce qu'on peut considérer comme un théorème relatif au centre de masse d'un système :

Théorème III.1 *La quantité de mouvement totale d'un système est égale à la quantité de mouvement qu'aurait un point matériel unique, doté la masse totale du système, et situé à tout instant au centre de masse, G :*

$$\vec{p}_{\text{tot}} = M\,\vec{v}_G, \tag{III.12}$$

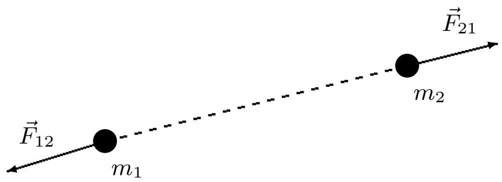
En ce sens, le centre de masse permet de définir un ***point matériel fictif****, localisé au barycentre du système et affecté de la masse totale, dont on peut dire qu'il* résume le système *du point de vue cinématique.*

Voilà pour l'aspect cinématique global. Qu'en est-il maintenant de l'aspect dynamique, c'est-à-dire des propriétés du système relatives aux forces ?

II Dynamique globale d'un système de points

II-1 Action et réaction

La fameuse « loi de l'action et de la réaction » établit que si un point matériel exerce sur un autre une certaine force, alors ce dernier exerce sur le premier une force exactement opposée, c'est-à-dire égale en norme, portée par la même droite mais orientée dans la direction opposée. Pour des raisons de symétrie, on peut en outre indiquer que la direction de ces deux forces n'est autre que la droite reliant les deux points,[2] de sorte que l'interaction est soit attractive, soit répulsive.



En notant $\vec{F}_{12}$ la force exercée sur la particule 1 par la particule 2, et $\vec{F}_{21}$ la force exercée sur la particule 2 par la particule 1, la loi de l'action et de la réaction s'écrit simplement :

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \tag{III.13}$$

Loi de l'action et de la réaction ou « troisième loi de Newton »

Cette « loi » se rattache à une propriété fondamentale du monde physique, dont nous verrons qu'elle est liée à la conservation de la quantité de mouvement. Son statut, pour la Physique, dépend du point de vue conceptuel adopté. Newton en a fait une loi fondamentale, appelée généralement *troisième loi de Newton*, mais la formulation lagrangienne de la Physique (mise en avant par Joseph-Louis Lagrange, et conceptuellement plus profonde) en fait plutôt une conséquence de la conservation de la quantité de mouvement, elle-même conséquence de l'homogénéité de l'espace (via le théorème de Nöther). Dans l'esprit de la Physique Classique, il nous semble que la loi $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ est première, mais cette affirmation est discutable. Au fond, nous pourrions voir cette égalité comme la traduction, dans le cadre classique, du fait que les forces du monde physique sont essentiellement des « interactions » : quoi que soient en réalité les entités qui interagissent (en Physique classique, ce sont des points matériels, en Physique quantique, ce sont des *champs quantiques*, etc.), elles interagissent en se couplant d'une manière qui ne donne la préséance à aucune de ces entités. Il s'agit d'une *inter*-action, réciproque, par couplage/appariement, et de fait, la *constante de couplage* est le paramètre clé en Physique quantique...

[2] On peut objecter que la force pourrait en principe faire intervenir, outre leur position, la vitesse relative des particules. Ceci distinguerait une direction privilégiée pour l'orientation de cette force, différente de la droite reliant les deux points. Mais s'agissant de la force exercée directement par une particule sur une autre, indépendamment de la présence d'autres corps, il ne semble pas qu'une vitesse non radiale puisse intervenir, car elle ne saurait être définie sans référence à un cadre extérieur. Du point de vue exclusif de ces deux particules, la seul vitesse qu'il soit possible de définir est la vitesse radiale, c'est-à-dire la variation de leur distance relative par unité de temps... (Cette question renvoie au problème fondamental de la nature de l'espace et de sa contruction/constitution dans le monde matériel et/ou par le monde matériel – un problème toujours à résoudre...)

II-2 Dynamique globale d'un système de points

II-2-a Système isolé

Chaque point matériel du système évolue dans l'espace conformément à la relation fondamentale de la dynamique (RFD), de sorte que si l'on note $\vec{p}_i$ la quantité de mouvement de la particule[3] i, et $\vec{F}_{ij}$ la force exercée sur i par la particule j, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_j \vec{F}_{ij}.$$

Le taux de variation de la quantité de mouvement totale, $\vec{p}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{p}_i$, se calcule alors aisément, en regroupant les interactions réciproques des différents couples de particules (la dernière égalité s'obtient simplement par interversion des indices muets i et j) :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} + \sum_{i>j} \vec{F}_{ij} = \sum_{i<j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}),$$

et comme, d'après la loi de l'action et de la réaction, $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0}$, on a finalement :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}. \tag{III.14}$$

Il apparaît ainsi que, quel que soit le système de points matériels considéré, quel que soit le nombre de corps physiques et quelles que soient les interactions qu'ils manifestent, la quantité de mouvement totale du système se conserve, dès l'instant qu'il est isolé, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de force s'exerçant de l'extérieur.

Comme le montre le calcul ci-dessus, il s'agit là d'une conséquence directe de la loi de l'action et de la réaction, stipulant que $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$. Inversement, si l'on pose pour principe que la quantité de mouvement totale d'un système isolé, quel qu'il soit, se conserve en toute circonstance, alors on montre aisément (en considérant des systèmes élémentaires à deux particules) que la loi de l'action et de la réaction énoncée plus haut doit être vraie. Il y a ainsi équivalence entre la conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé et la loi de l'action et de la réaction (cf. discussion ci-dessus).

II-2-b En présence de forces extérieures

En présence de forces extérieures, c'est-à-dire de forces exercées sur des particules faisant partie du système par des particules qui lui sont extérieures (c'est-à-dire par « l'environnement »), le même calcul montre que le taux de variation de la quantité de mouvement totale du système est égal à la somme des forces extérieures. En effet, en notant $\vec{F}_{i,\text{ext}}$ la force exercée, depuis l'extérieur, sur la particule i, on obtient aisément, en tenant compte du résultat précédent :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{i,\text{ext}} \right) = \sum_i \vec{F}_{i,\text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext,tot}}. \tag{III.15}$$

On voit donc que le système, considéré dans son ensemble, se comporte du point de vue dynamique de manière analogue à un point matériel unique : sa quantité de mouvement est influencée par les forces s'appliquant sur lui selon le schéma de la Relation Fondamentale de la Dynamique.

point d'application des forces

Un point très important est toutefois à noter : l'équation (III.15) fait intervenir la somme de toutes les forces agissant sur n'importe quel point ou ensemble de points du système, *quel que soit l'endroit où ces forces s'appliquent* ! La question du point d'application des forces est extrêmement important en mécanique, et chacun sait que, pour une même force appliquée horizontalement à un bouteille posée sur une table, par exemple, l'effet produit pourra être tantôt un glissement, tantôt un basculement, selon que l'on applique cette force vers le bas ou vers le haut de la bouteille. Tant que l'on ne s'intéresse qu'au mouvement des points matériels individuels, la question du point d'application des forces ne se pose pas, puisqu'il n'y a, par définition, qu'un point d'application possible : celui matérialisé par le point matériel ! Mais dans le cas d'un système étendu (corps

[3] Par un abus de langage pratique et ne prêtant généralement pas à confusion, on utilise souvent le mot « particule » comme synonyme de « point matériel », dans le contexte de la Mécanique Classique.

solide macroscopique) ou plus généralement d'un système de points quelconques, la connaissance des vecteurs forces (intensité et direction) ne suffit pas à déterminer mécaniquement le système : il faut connaître en outre le ou les points d'application des forces.

Ce que nous venons de voir, néanmoins, c'est que la quantité de mouvement totale d'un système, $\vec{p}_{\text{tot}}$, évolue de manière indépendante des points d'application des différentes forces, puisque seule la somme vectorielle $\sum_i \vec{F}_{i,\text{ext}}$ intervient. Il s'agit là d'un résultat simple mais tout à fait remarquable !

II-3 Théorème du centre de masse

II-3-a Énoncé

L'étude précédente nous permet d'énoncer une propriété générale des systèmes de points matériels, et donc de tout système physique (dans le paradigme mécaniste considéré). On peut lui donner le nom de « théorème du centre de masse[4] » :

Théorème III.2 *Quel que soit le système de points matériels considéré, la relation fondamentale de la dynamique s'applique au point matériel fictif G localisé au centre de masse du système et affecté de la masse totale M, soumis à la somme des forces agissant sur les différents points du système :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\vec{v}_G) = \sum_i \vec{F}_i. \tag{III.16}$$

NB : dans la mesure où la somme des forces intérieures au système est toujours nulle, en vertu de la loi de l'action et de la réaction, on peut préciser, dans l'énoncé ci-dessus, que le point G est soumis à la somme des forces *extérieures* agissant sur le système : $\sum \vec{F} = \sum(\vec{F}_{\text{int}} + \vec{F}_{\text{ext}}) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\vec{v}_G) = \sum_i \vec{F}_{i,\text{ext}}. \tag{III.17}$$

Comme nous l'a indiqué le Théorème III.1, le centre de masse, G, *résume le système* du point de vue cinématique, dans la mesure où la quantité de mouvement totale du système n'est rien d'autre que la quantité de mouvement du point G lui-même (considéré comme un point matériel effectif). Le théorème du centre de masse, ci-dessus, indique quant à lui que le centre de masse résume également le système du point de vue dynamique, puisque son mouvement apparaît induit par l'ensemble des forces en présence.

II-3-b Conservation de la quantité de mouvement

Une conséquence immédiate du théorème précédent est la loi de conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé. Par définition, un « système isolé » est un système n'interagissant pas avec "l'extérieur", c'est-à-dire un système dont les composantes ne subissent aucune autre force que celles qu'elles exercent les unes sur les autres. Dans ces conditions, la somme des forces subies par le système est évidemment nulle, et la quantité $M\vec{v}_G$, qui n'est rien d'autre que la quantité de mouvement totale du système, est constante. Ainsi[5] :

Théorème III.3 *La quantité de mouvement totale d'un système isolé est constante :*

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}_{\text{tot}} = \mathrm{c}^{\underline{\mathrm{te}}}. \tag{III.18}$$

Il est intéressant de noter, comme le faisait Descartes, que dans la mesure où l'univers matériel dans son ensemble est à l'évidence un système isolé, il n'y aura jamais dans l'univers ni plus ni moins de mouvement qu'il n'y en a aujourd'hui, et de même il n'y en a jamais eu ni plus ni moins par le passé. Mais il importe de comprendre que cette conservation de la quantité de mouvement totale concerne une grandeur vectorielle : $\vec{p}_{\text{tot}} = \sum \vec{p}_i$, de sorte qu'une quantité de mouvement nulle n'implique pas qu'il n'y ait aucun mouvement ! Si deux corps massifs sont "lâchés" sans vitesse relative initiale à une certaine distance l'un de l'autre, en les supposant isolés de toute influence autre que leur attraction gravitationnelle réciproque, il va de soi que la force de gravitation va les mettre l'un et l'autre en mouvement. Mais la somme *vectorielle* de

[4] NB : cette appellation n'est pas standardisée...

[5] NB : dans les expressions mathématiques, on utilisera l'abbrévation « $\mathrm{c}^{\underline{\mathrm{te}}}$ » en lieu et place de « constante ».

leur quantité de mouvement restera toujours égale à zéro : $\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$. Quelles que soient leurs masses m_1 et m_2, la quantité de mouvement de l'un sera toujours égale et opposée à celle de l'autre, $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$.[6] Ainsi, un système initialement au repos peut évoluer et manifester des mouvements internes, mais la quantité de mouvement totale, elle, ne peut changer en aucune circonstance. C'est une propriété fondamentale de la Nature, conséquence de la loi d'action et de la réaction (à moins que ce ne soit l'inverse ;-)) : un système isolé conserve indéfiniment la même quantité de mouvement vectorielle totale.

II-3-c Centre de masse et centre d'inertie

centre d'inertie

Les propriétés du centre de masse que nous venons de découvrir justifient que l'on appelle souvent « centre d'inertie » ce point matériel fictif particulier. En effet, la loi d'inertie s'applique en toutes circonstances à ce point et à lui seul. Rappelons que, selon cette loi, un corps initialement au repos dans un référentiel galiléen reste indéfiniment au repos si aucune force ne s'applique, et plus généralement, un corps garde indéfiniment sa vitesse (en norme et en direction) en l'absence de forces. En présence d'une force (ou d'une combinaison vectorielle de force), la vitesse est modifiée à un taux précisément égal à cette force, avec un coefficient de proportionnalité qui est la masse inertielle du corps, quantifiant de fait son inertie, au sens de « résistance à la modification du mouvement ».

Dans le cas d'un système de points matériels, la masse inertielle totale apparaît comme la masse qui, affectée au point G (centre de masse), caractérise l'influence d'une force sur la modification du mouvement de G, et réciproquement le point G se comporte comme un point matériel caractérisant l'inertie globale du système, dans sa manière de réagir aux forces. En particulier, il reste indéfiniment au repos s'il est initialement au repos et qu'aucune force extérieure n'est appliquée (dans un référentiel galiléen). Il est le seul point du référentiel considéré à satisfaire cette propriété quelles que soient les forces d'interaction entre les constituants du système, et quels que soient les mouvements dont ces constituants peuvent être animés.

II-3-d Conservation de la quantité de mouvement et systèmes macroscopiques

La conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé et, plus généralement, le théorème du centre de masse s'appliquent en toutes circonstances, quelle que soit la situation mécanique considérée. Nous avons vu que cela découlait simplement de la loi universelle de l'action et de la réaction, $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, et qu'on peut aussi le voir du point de vue mathématique comme une conséquence du théorème de Nöther, ou du point de vue physique à l'aide de la notion d'interaction, sous-jacente à la notion de force. Mais le plus important, pour la question qui nous occupe dans ce chapitre, c'est que la conservation de la quantité de mouvement permet d'examiner quantitativement des situations macroscopiques délicates où il serait impossible d'appliquer la relation fondamentale de la dynamique aux corps en présence. C'est le cas notamment lorsque l'intégrité physique des corps est mise en cause, lors de l'éclatement d'un corps en plusieurs morceaux par exemple. Dans un tel cas, en effet, on ne sait à quel corps appliquer la relation fondamentale de la dynamique (RFD). Celle-ci ne peut être appliquée au corps initial que *jusqu'à* l'éclatement, tandis que le mouvement des corps produits par l'éclatement ne peut être décrit par la RFD qu'*après* cet événement macroscopique particulier. Comment relier les deux situations mécaniques distinctes, avant et après l'éclatement ?

problème de l'éclatement d'un corps macroscopique

À l'échelle microscopique, il n'y a bien sûr aucun problème : chaque corpuscule, chaque point matériel obéit à la RFD et suit une trajectoire dictée par les forces s'exerçant sur lui à chaque instant, sans se soucier de son "appartenance" à tel ou tel corps perçu macroscopiquement comme une entité spécifique. Mais le nombre des corpuscules qu'il faudrait suivre un à un pour décrire l'ensemble des mouvements est bien trop grand pour qu'une telle stratégie soit envisageable en pratique. C'est pourquoi nous cherchons spontanément à décrire le mouvement des corps macroscopiques au moyen de lois effectives les traitant de manière globale, en tant que corps

[6] On en déduit immédiatement que le corps le plus massif aura la vitesse la plus faible : $\vec{v}_1 = -(m_2/m_1)\vec{v}_2$, tendant vers $\vec{0}$ pour un corps de masse infinie. Dans le cas d'une pomme tombant sur la Terre, la Terre est belle et bien attirée vers la pomme – avec la même force que la pomme est attirée vers la Terre ! –, mais la vitesse induite reste totalement négligeable par rapport à celle de la pomme, du fait de l'énormité du rapport des masses. Heureusement que la Terre n'est pas ballottée en tous sens chaque fois qu'un fruit mur tombe au sol ou qu'une puce saute d'un point à un autre ! Elle l'est pourtant nécessairement, puisque la quantité de mouvement se conserve, mais de façon imperceptible....

constitués rigides et inaltérables : des solides. Et c'est aussi pourquoi le cas de l'éclatement pose problème : il contrarie explicitement cette stratégie et l'approximation qu'elle implique.

Un problème analogue d'application de la RFD à une situation macroscopique se rencontre dans tous les cas où se produit un « choc » entre plusieurs corps. Nous les envisageons de manière générale dans la section suivante, en montrant comment les propriétés fondamentales de l'univers mécanique que nous venons de mettre au jour permettent de surmonter certaines difficultés résultant du passage de l'échelle des corpuscules, à laquelle s'appliquent pleinement les lois de la dynamique, à l'échelle macroscopique, où nous sommes contraints à considérer les corps de manière approchée, comme des entités globales, bien définies et bien délimitées.

III Chocs et lois de conservation

III-1 Choc entre corps solides

III-1-a Position du problème

Un choc est une situation dans laquelle deux corps solides (points matériels ou corps étendus) se trouvent en interaction pendant un intervalle de temps très bref à l'échelle considérée. Idéalement, il s'agit d'une interaction « instantanée », comme dans le cas de la collision de deux boules de billard, par exemple, ou du rebond d'une balle sur un mur, où le contact entre les deux corps ne dure pratiquement "qu'un instant".

Comment traiter une telle situation ? La relation fondamentale de la dynamique ne peut guère nous aider, car son application nécessite la connaissance des forces. Or non seulement les forces apparaissant au moment du choc sont le plus souvent extrêmement difficile à décrire en détail, mais dans l'approximation considérée où le contact est instantané, il est même impossible de les définir !

Avant le choc, les forces sont nulles, et l'application de la RFD ne pose aucune difficulté : les deux points matériels se déplacent à vitesse constante. Il en est de même après le choc. Le problème du choc ne se situe ni avant, ni après, mais bien *pendant*. Mais que signifie « pendant » si le choc ne dure qu'un instant, et que sa *durée* est donc nulle ?

Au moment du choc lui-même, on ne peut plus décrire les trajectoires de manière lisse, et appliquer l'équation différentielle habituelle, $m\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = \vec{F}$, car la vitesse n'est *pas* continue ! Si la force est bien égale à la dérivée de la vitesse par rapport au temps, il faut pouvoir envisager un intervalle de temps non nul, regarder la variation de vitesse correspondante, faire le rapport des deux, et regarder vers quoi ce rapport converge lorsque l'intervalle de temps tend vers zéro. Mais ici, la dérivée est nulle avant le choc, nulle après choc, et indéfinie au moment même du choc. Si l'on considère deux instants quelconques de part et d'autre du choc, on voit que la différence de vitesse entre ces deux instants est constante, puisque les vitesses avant et après le choc sont constantes. Le rapport $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ tend donc vers l'infini lorsque $\mathrm{d}t$ tend vers zéro, et la force impliquée apparaît... infinie !

C'est toute l'idée de l'inertie : il est impossible de modifier le mouvement d'un corps matériel instantanément ! Un choc instantané est donc une aberration physique, que l'on n'est amené à considérer en pratique qu'en raison des simplifications que nous faisons spontanément en appréhendant la réalité physique, notamment en regardant la collision sur une échelle de temps et d'espace inappropriée. Mais comment faire autrement ? Dans le cas d'un choc entre deux boules de billard, par exemple, il n'est pas question de se placer au niveau des innombrables corpuscules constituant les boules pour étudier leur mouvement individuel. Le formalisme classique pourrait s'y appliquer en principe, mais en pratique, ce n'est tout simplement pas envisageable, et il faudrait d'ailleurs dans ce cas renoncer à considérer les boules comme des corps solides bien définis (parfaitement rigides, avec des constituants immobiles les uns par rapport aux autres).

Est-ce à dire que le formalisme de la Physique classique est en pratique impuissant dans toutes les situations de choc, ou plus largement dans les situations où les interactions directes entre corpuscules microscopiques ont un effet sur le mouvement des corps macroscopiques ? Fort heureusement, non !

III-1-b Le choc comme une "boîte noire"

Comme nous l'avons vu plus haut, la conservation de la quantité de mouvement totale d'un système est universelle. Elle est valable pour tout système physique, et s'applique donc en particulier à deux corps entrant en collision. La description du choc lui-même pose problème, mais quoi qu'il puisse en être, la quantité de mouvement *après le choc* est nécessairement égale, vectoriellement, à la quantité de mouvement *avant le choc.* Il est donc possible d'avoir des informations précises sur l'état du système après la collision, sans avoir à préciser ce qui s'y passe, ni qualitativement, ni quantitativement. De telles informations pourraient alors nous amener à considérer le choc lui-même comme une "boîte noire" (cf. Fig. III.1), à renoncer à le décrire en détail pour nous concentrer sur le lien entre l'état initial et l'état final, les seuls qui nous soient accesibles. Ainsi, par exemple, le joueur de billard voudra anticiper le mouvement des boules après le choc qu'il prépare, et non la manière dont le revêtement de la boule blanche interagira avec celui de la boule rouge dans la zone de contact microscopique. Le joueur de tennis veut pouvoir estimer la position de la balle après le rebond sur le sol, mais ne prête guère attention aux interactions momentanées entre les molécules de la balle et les brins d'herbe du sol ou la terre battue, ni aux réarrangements internes à la balle après ce choc (déformation, oscillations...).

III-1-c Choc élémentaire entre deux points matériels idéaux

Examinons alors la situation élémentaire idéalisée où deux *points matériels* entrent en collision à un instant donné, sans exercer la moindre influence l'un sur l'autre hormis à cet instant précis du choc. Ces deux points matériels, par définition, sont sans structure, et ne sont caractérisés du point de vue physique que par leur masse, m_1 et m_2, et du point de vue cinématique par leur position et leur vitesse au cours du temps (dans un certain référentiel galiléen).

Conservation de la quantité de mouvement Si l'on note $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les vitesses initiales des deux particules, et $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$ leurs vitesses finales (après le choc), la conservation de la quantité de mouvement du système nous permet d'écrire une relation universelle, indépendante des circonstances particulières du choc :

$$m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2. \tag{III.19}$$

Cela ne nous permet pas de calculer individuellement les vitesses des deux particules après le choc, dans l'hypothèse où les vitesses initiales $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont connues, mais c'est une relation utile, qui permet par exemple de déterminer l'une des deux vitesses finales en fonction de l'autre. Par exemple :

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 + \frac{m_1}{m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_1').$$

La même relation peut être écrite sous la forme

$$(\vec{v}_2' - \vec{v}_2) = -\frac{m_1}{m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_1'),$$

qui indique que la variation de vitesse des deux particules (en norme) est dans le rapport inverse de leur masse. Lorsqu'une balle de tennis rebondit sur le sol – c'est-à-dire sur la Terre ! –, notre honorable planète ne voit pas sa vitesse trop durement affectée...

Proposons enfin une autre écriture de la même relation :

$$m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2,$$

où l'on a notéΔ $\vec{v}_i$ l'écart de vitesse de la particule i, provoqué par le choc.

Cette forme nous invite à un nouveau commentaire sur l'équivalence entre la loi de conservation de la quantité et la loi de l'action et de la réaction. En effet, en notant toujours $\vec{F}_{i\to j}$ la force exercée par la particule i sur la particule j, la relation fondamentale de la dynamique appliquée respectivement à la particule 1 et la particule 2 s'écrit :

$$m_1\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{2\to 1} \quad \text{et} \quad m_2\frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{1\to 2}.$$

Dans une situation de choc, les dérivées des vitesses tendent vers l'infini au moment de l'interaction, et les forces réciproques exercées sont mal définies. Mais rien n'empêche d'intégrer

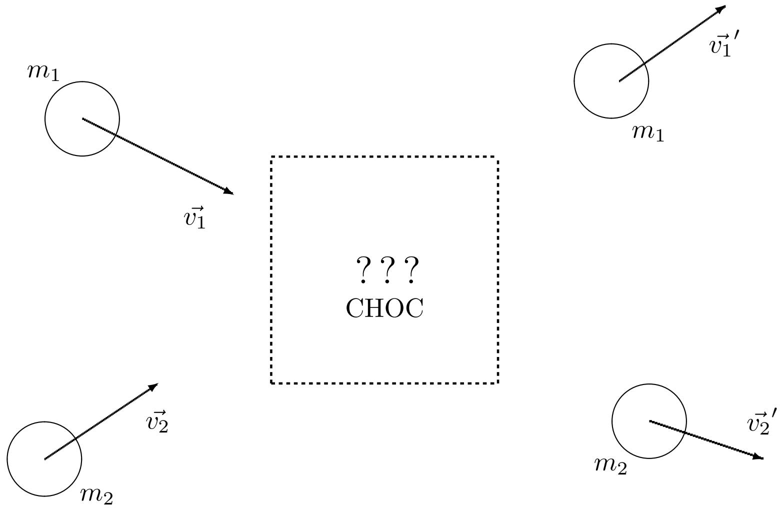


FIG. III.1 – Choc entre deux corps. Le choc lui-même ne peut être décrit précisément, car les forces s'y manifestent sur des échelles de temps très courtes, et à des échelles généralement inaccessibles. Le choc représente en quelque sorte une "boîte noire", faisant passer le système d'un état dynamique à un autre.

les deux relations ci-dessus entre un instant t_{in} avant le choc, et un instant t_{out} après le choc. Ces instants peuvent être pris n'importe quand avant et après le choc, puisque, hormis pendant le choc lui-même, les particules ne subissent aucune force et leur vecteur vitesse demeure inchangé. On obtient alors :

$$m_1 \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{out}}} \frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{out}}} \vec{F}_{2\to 1}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad m_2 \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{out}}} \frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{out}}} \vec{F}_{1\to 2}\mathrm{d}t,$$

d'où l'on déduit (par intégration triviale des membres de gauche) :

$$m_1[\vec{v}_1]_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{out}}} = \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{out}}} \vec{F}_{2\to 1}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad m_2[\vec{v}_2]_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{out}}} = \int_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{out}}} \vec{F}_{1\to 2}\mathrm{d}t,$$

et enfin, puisque les intégrales des forces figurant dans les membres de droite sont, comme les forces elles-mêmes, opposées l'une de l'autre :

$$m_1[\vec{v}_1]_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{out}}} = -m_2[\vec{v}_2]_{t_{\text{in}}}^{t_{\text{out}}} \quad \text{soit} \quad m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2.$$

Argument énergétique L'expression de la conservation de la quantité de mouvement, ci-dessus, fournit une relation universelle entre les vitesses des deux corps avant et après le choc. Mais pour déterminer complètement l'état post-choc à partir de la seule connaissance de l'état pré-choc, il faudrait disposer d'une autre relation générale entre les vitesses.

Or les vitesses interviennent aussi dans l'énergie cinétique des corps. Un argument énergétique pourrait donc nous fournir une relation supplémentaire.

[...]

à suivre

[...]

III-2 Inélasticité d'un choc

La notion d'inélasticité se rapporte à la variation d'énergie cinétique entre l'état initial et l'état final.

III-2-a Conservation de l'énergie et échelle

Au niveau élémentaire, nous avons démontré au chapitre II que l'énergie totale d'un système isolé se conservait toujours. Dans une situation de choc, comme dans toute autre situation, l'énergie initialement présente est donc nécessairement présente également, en intégralité, dans l'état final. Mais sous quelle forme ? Et à quelle échelle ?

Prenons l'exemple d'une partie de billard. Le simple fait de parler de « boules de billard » indique qu'on identifie certains sous-ensembles de la réalité physique comme des entités séparées, bien définies, en oubliant (volontairement ou non) leurs innombrables constituants plus élémentaires dont elles héritent pourtant l'ensemble de leurs caractéristiques cinématiques et dynamiques (cf. réductionnisme). C'est le mouvement des boules, ainsi abstraites et idéalisées, qui nous intéresse alors, et non celui des molécules qui les composent – dont on ne sait rien, et dont, de surcroît, on ne veut rien savoir ! En parlant de l'énergie cinétique des boules de billard, nous nous référons implicitement à l'énergie associée au déplacement macroscopique des boules elles-mêmes, considérées comme des corps solides véritables, c'est-à-dire supposées authentiquement indéformables, avec des constituants qui ne sauraient avoir le moindre mouvement les uns par rapport aux autres.

Cette hypothèse est bien évidemment fausse, et chacun sait aujourd'hui que les constituants de quelque corps que ce soit sont toujours animés ne serait-ce que d'un mouvement d'*agitation thermique*, d'autant plus important que la température est élevée. Dans un solide, ces mouvements se produisent autour de positions stables, de sorte que la *position moyenne* de chaque constituant l'un par rapport à l'autre est pratiquement fixe : c'est en ce sens que le solide *est* solide. Dès lors, sauf à s'intéresser explicitement à ces mouvements microscopiques individuels, on ne perd pas grand chose à supposer que cette agitation n'a pas lieu, et que les constituants du corps ne quittent jamais leur position moyenne (comme si le corps était à température nulle, en quelque sorte).

Il suffit de se souvenir qu'en disant qu'une boule de billard est au repos, nous ne voulons pas signifier que ses constituants ne sont animés d'aucun mouvement : nous voulons simplement dire que les positions moyennes autour desquelles ces constituants s'agitent sont, elles, immobiles, ou plus généralement encore, qu'à l'échelle où l'on se place pour décrire le mouvement de cette boule, il n'y a guère de différence entre son état de repos constaté et un repos véritable, intégral et parfait.

Sur le plan énergétique, en revanche, on ne saurait *a priori* ignorer la différence. Dans une situation de repos véritable et complet, l'énergie cinétique des particules individuelles étant nulle (dans le référentiel de repos considéré, cela va sans dire), on peut dire que l'énergie cinétique totale du système est nulle. Dans une situation de repos macroscopique ordinaire, en revanche, l'énergie cinétique totale est non nulle, mais cette énergie cinétique n'est pas associée à un mouvement de la boule : à l'échelle macroscopique où la boule peut être définie, le déplacement des constituants eux-mêmes est non-pertinent, c'est-à-dire qu'il est « comme s'il n'était pas ».

On pourrait dire ainsi qu'il y a bien de l'énergie cinétique, mais que celle-ci se trouve *à l'échelle microscopique*. Si la boule a une vitesse (globale) nulle – c'est-à-dire, en toute rigueur, si les positions moyennes des constituants de la boule ont une vitesse nulle, et si les mouvements microscopiques n'ont pas d'incidence sur l'état perceptible de la boule macroscopique –, son énergie cinétique *à l'échelle macroscopique* est nulle.

Revenons alors au problème du choc entre les deux boules de billard. Ce que nous avons démontré au chapitre II, c'est que l'énergie totale du système se conservait...

[...]

à suivre

[...]

III-2-b Inélasticité et élasticité

[...]

Impossible de déterminer par un calcul direct la fraction d'énergie qui est dissipée au cours d'un choc donné...

[...]

Description phénoménologique...

[...]

Recours à des arguments empiriques...

[...]

On appelle *inélasticité* d'un choc la fraction de l'énergie cinétique incidente qui n'est pas restituée dans l'état final, et qui est donc dissipée lors du choc.

En notant $E_{\mathrm{c,tot}}$ l'énergie cinétique totale du système avant le choc, et $E'_{\mathrm{c,tot}}$ l'énergie cinétique totale après le choc, l'inélasticité, ξ, s'écrit donc par définition :

$$\xi \equiv \frac{E_{\mathrm{c,tot}} - E'_{\mathrm{c,tot}}}{E_{\mathrm{c,tot}}} = 1 - \frac{E'_{\mathrm{c,tot}}}{E_{\mathrm{c,tot}}}.$$

L'inélasticité est donc un nombre sans dimension, pouvant prendre des valeurs comprises en 0 et 1 : $0 \leq \xi \leq 1$.

Lorsque le choc est élastique, c'est-à-dire lorsque l'énergie se conserve (à l'échelle considérée), on a $E'_{\mathrm{c,tot}} = E_{\mathrm{c,tot}}$ et par conséquent $\xi = 0$: l'inélasticité est nulle.

Alternativement, on peut définir l'*élasticité* d'un choc comme la fraction de l'énergie initiale qui est restituée (à l'échelle considérée) à l'issue du choc. L'élasticité, que l'on notera ici η, est donc à nouveau un nombre sans dimension, compris entre 0 et 1, valant 1 pour un choc parfaitement élastique, et 0 pour un choc totalement inélastique, où l'énergie se dissipe entièrement (à l'échelle considérée) :

$$\eta = \frac{E'_{\mathrm{c,tot}}}{E_{\mathrm{c,tot}}} = 1 - \xi.$$

III-3 Principe de résolution générale

[...]

Bien que le détail des interactions à l'échelle où elles ont véritablement lieu soit en pratique inaccessible, les lois générales de conservation de la quantité de mouvement (valable en toutes circonstances), et de conservation de l'énergie (amendée par l'introduction d'un paramètre effectif, l'inélasticité, introduit de manière empirique) permettent d'obtenir des relations utiles et très générales entre la situation cinématique avant un choc, et la situation cinématique après le choc. Dans certains cas, ces lois de conservations permettent même de résoudre entièrement le problème choc, à l'échelle macroscopique.

Le principe de résolution d'un problème de choc peut être posé de la manière suivante.

Tout d'abord, la quantité de mouvement totale du système se conserve, et l'on peut par conséquent écrire, en notant avec un signe “prime” les grandeurs après le choc :

$$\vec{p}'_{\mathrm{tot}} = \vec{p}_{\mathrm{tot}}. \tag{III.20}$$

Ensuite, en supposant connue le coefficient d'élasticité du choc, η, l'argument énergétique prend la forme suivante :

$$E'_{\mathrm{c,tot}} = \eta E_{\mathrm{c,tot}}. \tag{III.21}$$

S'il s'agit d'un choc entre deux corps, de masse m_1 et m_2, gardant leur intégrité au cours du choc, et si l'on connaît les conditions initiales, avant le choc, « résoudre » le problème du choc consiste à déterminer les vecteurs vitesses, $\vec{v}'_1$ et $\vec{v}'_2$, des deux corps après le choc.

À trois dimensions, cela représente donc 6 composantes à déterminer, et donc 6 inconnues. Les équations de conservation, (III.20) et (III.21), fournissent en tout 4 relations : 1 pour l'énergie, et 3 pour les 3 composantes de la quantité de mouvement. Ces quatre relations ne suffisent pas à résoudre le problème à 6 inconnues, mais permettent de contraindre la situation finale, en réduisant considérablement l'espace des possibles. Les 6 paramètres à déterminer (c'est-à-dire les deux vecteurs $\vec{v}'_1$ et $\vec{v}'_2$) ne peuvent pas être quelconques : le système final n'a pas, en réalité, 6 degrés de liberté, mais seulement 2, les 4 autres étant contraints par les lois de conservation. Ces deux degrés de libertés peuvent être, par exemple, l'angle entre les deux vitesses finales, et l'angle entre le plan défini par ces deux vitesses et celui défini par les deux vitesses initiales. Si on les fixe, alors les 4 autres degrés de libertés du couple de vecteurs sont entièrement fixés, et les deux vitesses finales peuvent être entièrement déterminées.

[NB : inutile d'aller trop dans les détails de ces notions difficiles, qui seront totalement obscures à la plupart de étudiants...]

À deux dimensions, comme c'est le cas par exemple pour la collision de deux boules de billard, contraintes à se déplacer dans le plan du plateau, les deux vitesses finales, $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$, représentent en tout 4 composantes à déterminer. Dans ce cas, les relations fournies par les arguments de conservation sont au nombre de 3 : 2 pour la quantité de mouvement (à 2D), et 1 pour l'énergie. En supposant connu le système initiale (situation avant le choc), il reste donc un degré de liberté pour le système final, c'est-à-dire que la situation finale dépendra d'un paramètre et un seul : si on le fixe (c'est-à-dire si on ajoute une quatrième relation, quelle qu'elle soit, faisant intervenir les inconnues du problème), tout le reste est fixé.[7] Ce paramètre, par exemple, peut être l'angle existant entre les deux vitesses finales, $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$. NB : un argument d'un autre type peut permettre, dans certains cas, de déterminer ce paramètre supplémentaire, comme on le verra ci-dessous dans l'exemple de la collision "sans effet" entre deux boules de billard.

À une dimension, c'est-à-dire dans le cas où les deux corps sont contraints à se déplacer suivant un axe donné, les vitesses n'ont plus qu'une composante. La situation après le choc comporte donc deux inconnues (les deux vitesses), tandis que la conservation de la quantité de mouvement fournit une relation, et que la conservation de l'énergie en fournit une deuxième. Le problème est donc entièrement contraint : si l'on connaît la situation initiale (avant le choc), la situation finale (après le choc) est entièrement déterminée, *quelle que soit la nature du choc* (pourvu que l'élasticité soit connue) !

Il nous reste donc à la déterminer, de manière tout à fait générale.

NB : il est parfois astucieux de se placer dans le référentiel du centre de masse du système. La raison en est simple : dans ce référentiel, la quantité de mouvement totale du système est nulle ! En effet, nous avons vu que cette quantité de mouvement totale n'était rien d'autre que $\vec{p}_{\text{tot}} = M\vec{v}_G$, où $\vec{v}_G$ est la vitesse du centre de masse. Or cette vitesse est évidemment nulle dans le référentiel de ce point même ! CQFD. Il est toutefois important de s'assurer que ce référentiel est bien un référentiel galiléen : dans le cas contraire, il ne serait pas question d'appliquer le formalisme de la mécanique newtonienne, tel que nous l'avons mis en œuvre jusqu'ici. Mais là encore, le fait que le référentiel du centre de masse soit galiléen est tout à fait évident : c'est ce que garantit le théorème du centre de masse ! Puisque le système formé par les deux corps entrant en collision est un système isolé, la somme des forcesqui s'y applique est nulle, et donc, par rapport à un référentiel galiléen quelconque, $M\vec{v}_G = \vec{\text{cst}}$. Si le vecteur vitesse du point G par rapport à un référentiel galiléen est constant, c'est-à-dire si son mouvement est rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel galiléen, on peut attacher à ce point un référentiel lui-même galiléen. CQFD.

Résolvons donc la situation d'un choc unidimensionnel à deux corps, en nous plaçant dans le référentiel du centre de masse, où la quantité de mouvement initiale est donc nulle. Avec les notations précédemment introduites, et en projection sur l'axe du mouvement, on peut écrire la relation (III.20) de la manière suivante :

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0. \tag{III.22}$$

La relation (III.21), quant à elle, s'écrit :

$$\frac{1}{2}m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_2'}^2 = \eta\left[\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right].$$

Ce système de deux équations à deux inconnues se résout de manière immédiate en tirant de la première relation : $v_2' = -(m_1/m_2)v_1'$, et en remplaçant cette vitesse dans la seconde relation. On obtient alors :

$$\frac{1}{2}m_1 {v_1'}^2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) = \eta\times\frac{1}{2}m_1 v_1^2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right),$$

d'où l'on tire ${v_1'}^2 = \eta v_1^2$, et finalement :

$$v_1' = -\sqrt{\eta}\,v_1 \quad \text{et} \quad v_2' == -\sqrt{\eta}\,v_2.$$

[7] c'est très exactement cela qu'on entend par « degré de liberté »...

Ce résultat est parfaitement général : il décrit le rebond d'un corps sur un autre (à une dimension), dans le cas où le coefficient d'élasticité vaut η, mais il a été obtenu explicitement dans le référentiel du centre de masse. Qu'en est-il dans un autre référentiel ? Pour le découvrir, nous pourrions résoudre à nouveau le système de deux équations à deux inconnues fournit par les relations (III.20) et (III.21) écrites dans un référentiel quelconque. Il suffirait pour cela de remplacer la première relation ci-dessus, Eq. (III.22), par :

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Algébriquement, la résolution du système, quoiqu'élémentaire, est plus délicate dans ce cas. Mais nous pouvons utiliser un argument très simple afin de nous épargner cette tâche : il suffit d'effectuer un changement de référentiel !

Supposons que nous souhaitions résoudre le problème du choc entre nos corps, dans le référentiel quelconque, $\mathcal{R}$, où le premier va à la vitesse v_1, et le second à la vitesse v_2 (en projection sur l'axe). Cette fois, on n'a plus nécessairement $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$, mais rien ne nous empêche de :

1. effectuer un changement de référentiel pour nous placer dans le référentiel du centre de masse
2. résoudre le choc, c'est-à-dire déterminer les vitesses après le choc, *dans ce référentiel*
3. effectuer le changement de référentiel inverse, pour revenir au référentiel initial.

Cette procédure est parfaitement légitime, et souvent très utile en pratique. Dans le cas présent, l'étape 2. a déjà été traitée ci-dessus (sans gros effort !). Il reste donc à effectuer les changements de référentiels. Notons $v_1^\star$ et $v_2^\star$ les vitesses dans le référentiel du centre de masse, lui-même généralement noté $\mathcal{R}^\star$. Pour déterminer ces vitesses en fonction de v_1 et v_2, il suffit de remarquer que la vitesse du centre de masse, G, est donnée dans le référentiel initial, $\mathcal{R}$, par la relation :

$$v_{\mathrm{G}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \tag{III.23}$$

en vertu de sa définition même.

Par simple composition des vitesses à une dimension (additive, en mécanique newtonienne), on a alors :

$$v_1 = v_1^\star + v_{\mathrm{G}} \quad \text{et} \quad v_2 = v_2^\star + v_{\mathrm{G}}. \tag{III.24}$$

Le choc, résolu dans le référentiel du centre de masse, donne les relations suivantes (cf. ci-dessus) :

$$v_1'^\star = -\sqrt{\eta}\, v_1^\star \quad \text{et} \quad v_2'^\star = -\sqrt{\eta}\, v_2^\star,$$

d'où l'on tire

$$v_1'^\star = -\sqrt{\eta}\,(v_1 - v_{\mathrm{G}}) \quad \text{et} \quad v_2'^\star = -\sqrt{\eta}\,(v_2 - v_{\mathrm{G}}),$$

et finalement, par retour au référentiel initial (c'est-à-dire en utilisant une nouvelle fois la relation III.24) :

$$v_1 = v_{\mathrm{G}} - \sqrt{\eta}\,(v_1 - v_{\mathrm{G}}) \quad \text{et} \quad v_2 = v_{\mathrm{G}} - \sqrt{\eta}\,(v_2 - v_{\mathrm{G}}).$$

Il suffit enfin de remplacer v_{G} par sa valeur, exprimée ci-dessus en (III.23), pour obtenir la solution générale du problème du choc monodimensionnel d'élasticité η.

• Première remarque : la relation finale, une fois exprimée en fonction des données du problème, c'est-à-dire en fonction des masses et des vitesses initiales, est beaucoup moins simple dans un référentiel quelconque que dans le référentiel du centre de masse.

• Deuxième remarque : le passage au référentiel du centre de masse peut faciliter considérablement les calculs effectués, comme l'illustre cet exemple de façon éclatante.

• Troisième remarque : dans le référentiel du centre de masse, les vitesses finales s'avèrent s'exprimer en fonction des vitesses initiales de façon extrêmement simple, ne dépendant pas des masses, et ne dépendant même pas explicitement de la vitesse initiale de l'*autre* particule – preuve, s'il en fallait une, que c'est bien le référentiel "naturel" pour traiter ce problème. On notera toutefois que, si la vitesse v_1' ne dépend explicitement que de v_1, et non de v_2 (et symétriquement pour l'autre particule), c'est tout simplement parce que v_2 est entièrement fixé par v_1, dans le référentiel du centre de masse. L'exigence que la quantité de mouvement totale soit nulle dans ce référentiel réduit le nombre de degrés de liberté du système : si l'on fixe l'une des vitesses, l'autre n'a plus aucune liberté, elle est entièrement déterminée.

Nous allons maintenant traiter le cas de chocs à deux ou trois dimensions, mais en stipulant cette fois que le choc est élastique.

III-4 Choc élastique à deux corps

III-4-a Résolution générale

...

III-4-b Cas des masses identiques

...

III-4-c Cas d'un masse "infinie"

...

III-5 Choc mou

...

III-6 Désintégration

...

III-7 Moteur à réaction

...